

PROBLEMES POSES PAR LA MODELISATION / SIMULATION D'UN ENTREPOSAGE SOUTERRAIN DE DECHETS

Alain Bourgeat
bourgeat@univ-st-etienne.fr
Cours CEMRACS 2001

1 Introduction générale

1.1 Préliminaire

Il existe une grande quantité de déchets radioactifs engendrés par diverses activités industrielles (EDF, CEA, COGEMA, ...) médicales (hôpitaux, Universités, Laboratoires) et propulsion navale militaire.

Par exemple on prévoit, d'ici 2020, un volume de stockage de déchets (+ enrobage, + conteneurs) de quelques centaines de milliers de mètres cubes en France (correspondant approximativement à un entreposage souterrain repartit dans 1200 alvéoles dans un réseau de 102 km, linéaires, de galeries). Les déchets à stocker souterrainement sont de type B (faible et moyenne activité mais longue période) et de type C (haute activité, effets thermiques non négligeables) et la plus grande partie est fournie par le démantèlement des installations EDF (2000-2020 et 2020-2070). Le nombre d'éléments isotopes est supérieur à 25 et certains de ces éléments entreposés peuvent avoir une durée de vie très longue ($\leq 10^6$ années).

La problématique est donc d'estimer :

- quels sont les différents scénari d'évolution pendant cette période en fonction des choix d'entreposage.
- quelles sont les chances (!) de réalisation de ces scénari ?
- quelles sont les conséquences de la réalisation de chacun de ces scénari ?

1.2 Situation en France.

L'ANDRA, Etablissement Public Industriel et Commercial (depuis décembre 1991) est chargé de vérifier la qualité des déchets, concevoir, implanter construire et gérer les centres de stockage. Dans ce cadre elle a engagé:

- Travail de compréhension:
 - des diverses phénoménologies des couches hôtes (géologie / géoprospective - hydro/géochimie - géomécanique);
 - des matériaux du stockage (chimie-mécanique-thermique);
 - dans la biosphère

- et démarré la construction d'un laboratoire souterrain (Meuse) pour expérimentation in situ, échelle 1 (aôt 1999).

Jusqu'en 2020 les déchets seront entreposés en surface ou subsurface, entre temps les recherches sur la transmutation / séparation continuent et le stockage souterrain si il est décidé par le parlement ne pourra commencer qu'en 2020. D'ici là l'ANDRA doit présenter à la Commission Nationale d'Evaluation - une première vérification de sureté basée sur la définition d'un avant projet préliminaire de stockage en 2001 - des expérimentations en laboratoire souterrain por calage / validation - une seconde vérification de sûreté basée sur un avant projet évolué en 2004 -
 - Une ultime vérification de sureté basée sur le projet de stockage choisi en 2005 permettra la présentation du projet de stockage et des analyse de sureté associées qui sera soumis pour approbation au parlement en 2006.

1.3 Présentation du problème de simulation

1.3.1 Simulation du "champ lointain"

Prend en compte les écoulements et le transport des divers éléments à l'échelle d'une région (25 km \times 25 km \times 1 km).

Pour cela on s'appuie sur les données géologiques et hydrauliques et on utilise des modèles d'écoulements (mono ou multiphasiques) en milieu poreux, avec transport de matière et réactions (voir équations et modèles ci-après). Le stockage lui-même est réduit dans ce cas à une source répartie sur une "petite zone" (voir figure 1).

Les problèmes de modélisation mathématique ou numérique sont liés à la géohydrologie c'est-à-dire à la prise en compte des failles, des macropores, des micro fractures, des géologies fortement contrastées, liés aux écoulements qui peuvent être décrits soit par des lois d'écoulements (Newtonien, Non Newtonien) et liés à la géochimie (réaction, décroissance, sorption, gonflement). Un des problèmes essentiel, à ce niveau, est le passage des modèles définis au niveau mesoscopique (échantillon de roche, un colis) à des modèles valables au niveau macroscopique (couche géologique, stockage), tant au niveau échelle d'espace que échelle de temps.

1.3.2 Simulation du "champ proche"

Concerne l'étude du comportement des colis de déchets (déchetts enrobés dans une matrice de verre, de ciment ou de bitume, disposés dans un conteneur en acier ou beton) entourés de barrières ouvragées (argiles ou ciments) et leurs interactions avec la couche géologique hôte. Un stockage est alors composé des colis au sein d'alvéoles, réparties le long de galeries scellées (constituant un réseau de galeries et alvéoles) ainsi que des puits d'accès eux aussi scellés. L'échelle est de l'ordre de 1 m \times 1 m \times 10 m pour une alvéole seule à 50 m \times 50 m \times 100 m pour les interactions alvéoles / couche hôte. Dans le champ proche du stockage les phénomènes pris en compte sont thermique - hydraulique - mécanique - chimique - radiologique.

Les principaux problèmes sont des problèmes d'interfaces ou contacts entre les différentes zones (colis - barrière, colis - conteneurs, barrière - couche géologique, scellements ...) et les couplages des divers phénomènes pris en compte sont complexes (voir figure 2); par exemple:

- la transformation des smectites (argiles gonflantes) en illites (moins gonflantes avec moindre rétention des métaux) par le fer des conteneurs ou en zéolites (de moindre rétention des radionucléides) par le panache alcalin provenant de la dissolution / dégradation des bétons
- la production d'une phase gazeuse par corrosion / radialise.

1.3.3 Différentes échelles

Il existe diverses échelles dans lesquelles se situent les différents phénomènes, par exemple:

- l'échelle microscopique (forces ioniques, échange entre site solide et fluide, transfert de masses entre phases) voir figure 3
- l'échelle mésoscopique (Diffusion + Stokes, Concentration,..) voir figure 4
- l'échelle macroscopique (Milieu poreux + loi de filtration de Darcy - Diffusion effective - Concentration - Transport - Perméabilité - Porosité ...) voir figure 5.

1.4 Lois de filtration – formulation mathématique

Dans ce qui suit nous présentons donc, pour l'obtention des lois:

- des exemples du passage microscopique \rightarrow macroscopique, dans le cas d'écoulement lent ou rapide pour les fluides newtoniens incompressibles (lois de Darcy et de Forcheimer) ceci pouvant s'étendre au cas d'écoulements non newtoniens visqueux (Puissance - Carreau - Brinkman)(voir bibliographie en annexe)
- des exemples du passage mésoscopique \rightarrow macroscopique pour des écoulements multiphasiques (miscibles ou immiscibles) à petite ou grande vitesse dans des "réservoirs" hétérogènes y compris fracturés.

Pour des raisons de facilité dans l'exposition, nous supposerons le milieu périodique dans la plupart des cas. Cependant les résultats dans le cas stochastique seront présentés lorsque ce sera possible.

Plus précisément le plan de ce cours est le suivant

1. Loi de Darcy et variantes (fluides monophasiques)
 - (a) Passage de Stokes à Darcy
 - (b) Loi de Brinkman
 - (c) Effets non linéaires et loi de Forcheimer.
 - (d) Comportement de milieux poreux gonflants

En annexe on donne une démonstration détaillée du passage de Stokes à Darcy utilisant la méthode de l'énergie.

2. Lois de filtration des fluides multiphasiques.
 - (a) Modèle de Leverett de fluides immiscibles
 - (b) Modèle de Muskat
 - (c) Modèle de frontière libre de Baiocchi
 - (d) Modèle de Richards
 - (e) Comparaison des modèles.

En annexe on donne une présentation des changements d'échelles dans les modèles de filtration multiphasique par homogénéisation, tirée du chapitre 5 de [43] ainsi que l'(importante !) bibliographie tirée aussi de [43] concernant les ouvrages et articles essentiellement de modélisation mathématique pour les lois de filtration.

3. Transport par déplacement de fluides dans un milieu poreux.
 - (a) Déplacement miscible monofluide
 - (b) Transport par écoulement diphasique

2 Loi de Darcy et variantes

On a dans ce cas un problème d'homogénéisation, limite d'une suite de problèmes chacun défini dans un domaine différent dépendant de la taille des obstacles ε .

2.1 Passage Stokes-Darcy pour un fluide Newtonien

Dans le domaine Ω considéré, on part de l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible à travers des obstacles (répétition d'un obstacle typique Y_S) c'est-à-dire de l'équation de Stokes dans un ouvert Ω_ε :

$$\begin{cases} \mu \Delta u^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \vec{f} = 0, & \text{et } \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{k \in \mathbb{Z}^3} \varepsilon(k + \bar{Y}_S), \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon \end{cases} \quad (1)$$

Où comme d'habitude ε est la taille caractéristique adimensionalisée $\varepsilon = (\text{dimension de la période ou du pore}) / (\text{dimension de l'échantillon de roche}) = \text{période}$.

On établit ensuite des estimations a priori qui donnent les ordres de grandeur des "énergies".

A savoir en partant de l'inégalité de Friedrichs :

$$\forall v^\varepsilon \in (H_0^1(\Omega_\varepsilon))^3 \quad \int_{\Omega_\varepsilon} \left| \frac{v^\varepsilon}{\varepsilon} \right|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla_x v^\varepsilon|^2 dx$$

on obtient en écrivant la forme variationnelle de (1)

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla_x u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \leq c\varepsilon \quad (2)$$

$$\left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \leq c\varepsilon^2 \quad (3)$$

où u_ε est le prolongement de u^ε solution de (1) par zéro sur Ω tout entier.

De même pour la pression p^ε prolongée d'une façon "ad-hoc" (voir annexe) on a :

$$\int_{\Omega} |p_\varepsilon|^2 dx \leq c \quad (4)$$

$$\|\nabla p_\varepsilon\| = \sup_{\|\vec{\varphi}\| \leq 1} \int_{\Omega} p_\varepsilon \nabla \vec{\varphi} dx \leq c \quad \forall \vec{\varphi} \in (H_0^1(\Omega))^3 \quad (5)$$

Si on pose $v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon^2}$ on a alors $\|v_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3} + \varepsilon \|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq C$ qui avec (4) donne alors par un théorème de "convergence à deux échelles" ¹.

- v_ε [respectivement $\varepsilon \nabla v_\varepsilon$] converge "à double échelle" vers $v_0(x, y)$ [respectivement $\nabla_y v_0(x, y)$] et, donc $v^\varepsilon(x)$ [respectivement $\varepsilon \nabla v^\varepsilon$] converge faiblement c'est-à-dire "en moyenne" vers $v(x) = \int_Y v_0(x, y) dy$ [respectivement $\int_Y \nabla_y v_0(x, y) dy$].
- $p_\varepsilon(x)$ converge fortement dans $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ vers $p(x)$, vérifiant :

$$\begin{cases} v(x) = \frac{1}{\mu} K(f(x) - \nabla p(x)) \\ \nabla \cdot v(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ v(x) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6)$$

¹voir [4] et [57] pour le cas périodique et [20] pour le cas stochastique.

où le tenseur de perméabilité K est obtenu à partir du problème auxiliaire défini sur une cellule Y (en vérité sur le tore de \mathbb{R}^3 pour le cas périodique et sur tout \mathbb{R}^3 pour le cas stochastique) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_y X^i - \nabla_y \pi^i + e^i = 0, \quad e^i = i^{\text{ième}} \text{ vecteur de la base canonique,} \\ \nabla_y \cdot X^i = 0 \quad \text{dans } Y \bar{Y}_S, \\ X^i = 0 \quad \text{sur } \partial Y_S, \\ \pi^i(y), X^i(y), Y - \text{périodiques} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{\text{mes}.Y} \int_Y \bar{Y}_S \nabla X^i(y) \cdot \nabla X^j(y) dy. \quad (8)$$

Remarque 1. Une suite $w^\varepsilon(x)$ de fonctions dans $L^2(\Omega)$ converge à double échelle vers $w^0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ si pour toute fonction “régulière” $\varphi(x, y)$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_Y w^0(x, y) \varphi(x, y) dy dx$$

Remarque 2. Si on revient aux fonctions initiales u^ε , on voit alors que l’on a $u^\varepsilon(x)$ qui converge vers $\varepsilon^2 v(x)$, ce qui explique que la perméabilité “physique” qui est $\varepsilon^2 K$ soit exprimée en millidarcy.

Remarque 3. Le système (1) peut par simple renormalisation de la viscosité être réécrit avec $\varepsilon^2 v^\varepsilon = u^\varepsilon$:

$$\varepsilon^2 \mu \Delta v^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + f = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon$$

et dans le cas non stationnaire à faible nombre de Reynolds, c’est-à-dire avec $\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}$ dans le membre de droite, on obtient alors une loi intégrodifférentielle du type

$$v(t, x) = v_0(x) + \frac{1}{\mu} K(t) * (f - \nabla p)(t, x);$$

voir par exemple [5].

Remarque 4. Le cas des obstacles répartis aléatoirement mais néanmoins n’étant pas infiniment connectés est étudié dans [13].

2.2 Lois de Brinkman

On est dans les mêmes conditions que précédemment c’est-à-dire un fluide s’écoulant lentement dans un milieu poreux dont le mouvement microscopique est décrit par l’équation (1) mais dont la taille des obstacles a_ε (ou grains) est très inférieure à la taille ε de la période ou du pore.

On a alors 3 situations possibles correspondant à l’ordre de $\sigma_\varepsilon = \frac{\varepsilon^3}{a_\varepsilon}$:

- (a) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = +\infty$, (par exemple $a_\varepsilon \simeq \varepsilon^4$)
- (b) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = \sigma > 0$, (par exemple $a_\varepsilon \simeq \varepsilon^3$)
- (c) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = 0$, (par exemple $a_\varepsilon \simeq \varepsilon^2$)

Dans le cas (a), on a alors convergence de $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ fortement dans $H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ vers (v, p) solution unique de l’équation de Stokes dans Ω tout entier:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \Delta v - \nabla p + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot v = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ v = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \end{array} \right. \quad (9)$$

c'est-à-dire qu'à la limite on "ne voit plus" les obstacles à l'échelle de l'échantillon.

Dans le cas (b), $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ vers (v, p) l'unique solution de l'équation de Brinkman :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \Delta v - \nabla p + f = \frac{\mu}{\sigma^2} Mv \quad \text{et} \\ \nabla \cdot v = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (10)$$

où M est un tenseur de résistivité défini à partir du problème auxiliaire défini dans tout l'espace \mathbb{R}^3 après renormalisation par $y = x/a_\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_y \varphi^i - \nabla_y q^i = 0 \quad \text{et} \\ \nabla_y \cdot \varphi^i = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Y}_S \\ \varphi^i = 0 \quad \text{dans } Y_S \\ \varphi^i \rightarrow e^i \quad \text{lorsque } y \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (11)$$

avec

$$M_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Y}_S} \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j dy \quad (12)$$

ou

$$Me^i = \int_{\partial Y_S} \left(\frac{1}{2} (\nabla + \nabla^t) \varphi^i - q^i I \right) \vec{\eta} ds \quad (\text{la force de trainée}). \quad (13)$$

Finalement dans le cas (c), on a $(v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}, p_\varepsilon)$ qui converge fortement dans $L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ vers (v, p) unique solution d'un système de Darcy :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x) = \frac{1}{\mu} M^{-1} (f(x) - \nabla p(x)) \\ \nabla \cdot v(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ v(x) \cdot \eta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

La preuve dans les trois cas est obtenue en utilisant la méthode de l'énergie due à L.Tartar (voir par exemple [65] ou [66]) en renormalisant par $y = x/\varepsilon$ et avec construction des couches limites appropriées, voir par exemple [2] et [3].

Remarque 5. Une question qu'on peut se poser est quel est le lien entre K dans (6), (8) et M^{-1} dans (10), (12).

On a alors le résultat de continuité suivant (voir [1]). Si (χ^i, π^i) est l'unique solution de (7), en renormalisant par $y = \frac{x}{a_\varepsilon}$ et en définissant avec $\lambda = a_\varepsilon/\varepsilon$

$$\chi^i(\lambda, y) = \lambda \chi^i(\lambda y) \quad \text{et} \quad \pi^i(\lambda, y) = \lambda \pi^i(\lambda y)$$

alors $(\chi^i(\lambda, y), \pi^i(\lambda, y))$ converge faiblement lorsque $\lambda \rightarrow 0$ vers une combinaison linéaire des $(\varphi^k(y), q^k(y))$ dans $H_{loc}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Y}_S)^3 \times L_{loc}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Y}_S)$ et de plus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} M \rightarrow K^{-1}.$$

2.3 Effets non linéaires et loi de Forcheimer

La question se pose de savoir que va-t-il advenir lorsque l'écoulement à travers les pores devient suffisamment rapide pour voir agir, au niveau global, le terme inertiel $(v \nabla)v$ présent dans l'écoulement au niveau microscopique.

Pour celà on ajoute dans le système (1) le terme non linéaire et on renormalise le nombre de Reynolds pour pouvoir modéliser les effets inertiels d'un écoulement non lent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \varepsilon^\beta \Delta u^\varepsilon - (u^\varepsilon \nabla) u^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + f = 0 \\ \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\varepsilon = \partial \Omega^\varepsilon \end{array} \right. \quad (14)$$

Si on définit le nombre de Reynolds local $R_e^\varepsilon = \frac{U^\varepsilon \varepsilon}{\mu \varepsilon^\beta}$, puisque d'après le paragraphe 2.1 ci-avant on a $u^\varepsilon(x) \equiv \varepsilon^{2-\beta}(v(x) + O(\varepsilon))$, on a alors ce nombre qui est de l'ordre:

$$R_e^\varepsilon \equiv \varepsilon^{3-2\beta} \quad (15)$$

ce qui donne pour le nombre de Reynolds global $R_e = \frac{v \text{ diam}(\Omega)}{\mu \varepsilon^\beta}$, l'ordre de grandeur $R_e \equiv \varepsilon^{-\beta}$.

Le cas $0 \leq \beta \ll 3/2$, $\varepsilon^3 \leq R_e^\varepsilon \ll 1$ et $1 \leq R_e \ll \varepsilon^{-3/2}$ conduit à une loi de Darcy classique comme dans le cas 2.1; le terme non linéaire n'intervient alors pas dans le comportement global.

Cependant, comme on le verra ci-après, si on considère $\beta < 3/2$ mais suffisamment proche, on peut voir apparaître des effets inertiels au niveau global.

A. On commence par le cas où β est proche de $3/2$ tout en restant $< 3/2$ (voir [18] par exemple). On obtient alors, en introduisant

$$\left\{ \begin{array}{l} V = v(x) + R_e^\varepsilon v^1(x, y) \\ P = p(x) + R_e^\varepsilon p^1(x, y) \end{array} \right. \quad (16)$$

la loi globale

$$\begin{aligned} V_k = V \cdot e^k &= e^k \cdot K(f - \nabla P) + R_e^\varepsilon \sum_{i,j=1}^3 M_k^{ij} \left(f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) \\ &\times \left(f_j - \frac{\partial P}{\partial x_j} \right) + O((R_e^\varepsilon)^2) \end{aligned} \quad (17)$$

et la partie quadratique $R_e^\varepsilon(f - \nabla P, M_k(f - \nabla P))$ devient non négligeable dès que R_e^ε est proche de 1 c'est-à-dire lorsque β est proche de $3/2$; de plus le tenseur K est identique à celui obtenu en (8) à partir de (7) et le tenseur de la partie quadratique M_k est défini par le problème auxiliaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_y \omega^{ij} - \nabla_y \cdot \Lambda^{ij} = -\frac{1}{2}[(\chi^i \nabla_y) \chi^j + (\chi^j \nabla_y) \chi^i] \quad \text{et} \\ \nabla_y \cdot \omega^{ij} = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \bar{Y}_S \\ \omega^{ij} = 0 \quad \text{sur } \partial Y_S \\ (\omega^{ij}, \Lambda^{ij}) \quad Y - \text{périodiques} \end{array} \right. \quad (18)$$

$$M_k^{ij} = \int_{Y \setminus \bar{Y}_S} (\omega^{ij}(y) \cdot e^k) dy \quad k = 1, 2, 3 \quad (19)$$

où χ^i et χ^j sont définis par (7).

Les résultats de convergence sont alors dans $H(\Omega, \text{div}) = \{u \in L^2(\Omega)^3; \nabla \cdot u \in L^2(\Omega)\}$

B. Si maintenant on considère le cas $\beta = 3/2$ dans (14) c'est-à-dire le cas où $R_e^\varepsilon \simeq O(1)$, $R_e \simeq \varepsilon^{-3/2}$, on ne peut plus alors découpler les problèmes auxiliaires locaux (en la variable y) des problèmes globaux en x et on ne peut pas avoir une seule loi au niveau global.

Par contre comme dans [17] on trouve

$$v(x) = k(-\nabla p + f) \quad k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

avec

$$k(\alpha) = \int_Y \omega(\alpha) dy \quad (20)$$

où $\omega(\alpha)$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_y \omega(\alpha)(y) + (\omega(\alpha)(y) \nabla_y) \omega(\alpha)(y) + \nabla_y \pi(\alpha)(y) = \alpha \quad \text{et} \\ \nabla_y \omega(\alpha)(y) = 0 \quad \text{dans } Y, \\ \omega(\alpha)(y) = 0 \quad \text{sur } \partial Y_S \\ (\omega(\alpha)) \pi(\alpha) \quad Y - \text{périodiques} \end{array} \right. \quad (21)$$

pour $\forall \alpha \in \mathbb{R}^3$. De plus cette fonction $k(\alpha)$ peut être développée en série de Taylor, pour α proche de 0 et donne alors:

$$k(\alpha) = k'(0)\alpha + \frac{1}{2}k''(0)(\alpha, \alpha) + \frac{1}{6}k'''(0)(\alpha, \alpha, \alpha) + \dots$$

et d'après (20) on a alors $k'(0) = K$ (voir (8)) et $k''(0) = M$ (voir (19)).

La convergence (voir [17]) peut alors être obtenue dans $H(\Omega; div)$ grâce à l'introduction de couches limites.

Remarque 6. On peut aussi montrer (voir [17]) que si on met un paramètre λ mesurant l'importance des termes inertiels c'est-à-dire dans (14) en renormalisant le terme inertiel sous la forme:

$$-\lambda(u^\varepsilon \nabla) u^\varepsilon, \quad \lambda \in [0, 1]$$

on a alors la fonction $k(\alpha)$ qui dépend aussi de λ , et si on la note alors $k(\lambda, \alpha)$, on montre alors que lorsque $\lambda \rightarrow 0$

$$k(\lambda, \alpha) \rightarrow K\alpha.$$

2.4 Comportement de milieux poreux gonflants

Le passage du niveau microscopique (particules baignant dans une solution aqueuse) au niveau mésoscopique (échantillon de roche) doit inclure en plus de l'écoulement le transport des électrolytes et le champ électrique induit ainsi que la déformation des particules solides afin d'obtenir des lois constitutives par exemple pour les argiles gonflantes. La dérivation des lois mésoscopiques (au niveau d'un échantillon de roche) est dans ce cas beaucoup plus complexe et jusqu'à présent peu de travaux mathématiques ont abordé ce problème (voir par exemple [67] et [36]) en vue de valider mathématiquement les modèles globaux purement phénoménologiques (comme ceux par exemple obtenus dans [42]).

2.4.1 Modélisation au niveau microscopique

Au niveau microscopique, on a des particules solides (par exemple des cristaux de smectites) de taille de l'ordre du micron entourées d'une solution aqueuse éventuellement mobile composée d'eau (qui se comporte comme un fluide électriquement neutre) et d'une solution d'électrolytes (par exemple des cations Na^+ et des anions Cl^-). Chaque particule solide a sa surface externe chargée négativement par substitution isomorphe (par exemple Fe^{+2} se substitue à Al^{+3} dans les feuillets)

et de ce fait les cations dans la solution sont attirés vers les surfaces des particules, créant ainsi autour des particules une couche de diffusion ionique (voir figure a). Une particule est formée d'un empilement de feuillets (chacun d'épaisseur de l'ordre de 10 \AA) séparés par des espaces interfoliaires (constitué de couches de molécules d'eau d'épaisseur de l'ordre de 9 \AA). Dans le cas non saturé il faudrait prendre en compte séparément les différentes couches (y compris l'eau interfoliaire). Dans le cas saturé on considère que l'eau dans les couches interfoliaires (appelée eau adsorbée) ne communique pas avec l'eau dans la solution aqueuse entourant les particules et chaque particule se comporte comme un système fermé.

Dans la solution aqueuse Ω_f , constituée d'eau (fluide électriquement neutre) et d'électrolytes (Cl^- et Na^+ provenant de la dissociation du sel), la présence de concentrations différentes n^+ et n^- (en anions Cl^- , respectivement en cations Na^+) crée un champ électrique E regit par l'équation de Maxwell:

$$\begin{aligned} E &= -\nabla\phi \\ \tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^0\nabla\cdot E &= ze(n^+ - n^-) \text{ dans } \Omega_f \end{aligned}$$

(ze étant la charge ionique ponctuelle).

Le champ électrique E , ainsi créée, agit alors comme une force qui s'équilibre avec le déplacement du fluide (vitesse v et p pression hydrodynamique de la solution aqueuse) suivant la loi de Stokes:

$$\begin{aligned} \mu_f\Delta v - \nabla p + qE &= \nabla\cdot\sigma_f = 0 \\ \nabla\cdot v &= 0 \text{ dans } \Omega_f \end{aligned}$$

avec adhérence à la paroi Γ (interface solution aqueuse / particules).

Le flux de cations et anions est produit par la convection du fluide, une diffusion fickienne et une diffusion provenant de la migration ionique :

$$\frac{\partial n^\pm}{\partial t} + v\nabla n^\pm = \nabla\cdot(D^\pm\nabla n^\pm) \pm \nabla\cdot\left(D^\pm\frac{n^\pm e}{kT}\nabla\phi\right) \text{ dans } \Omega_f$$

avec imperméabilité chimique de la frontière solide Γ .

Le déplacement u de la phase solide (particules) se fait (élasticité linéaire) sous les effets du fluide :

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\sigma_s &= 0 \\ \sigma_s &= \lambda_s\nabla\cdot uI + 2\mu_s\varepsilon(u) \text{ dans } \Omega_s \\ \text{avec } v &= \frac{\partial u}{\partial t} \text{ et } \sigma_s\cdot\eta = \sigma_f\cdot\eta \text{ sur l'interface } \Gamma. \end{aligned}$$

La charge σ sur la surface des particules solides est en équilibre avec le champ électrique dans le fluide :

$$\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^0 E\cdot\eta = -\sigma \text{ sur } \Gamma$$

et on a électroneutralité du mélange (sans que ceci ne soit le cas de chacun des composants pris individuellement):

$$-\int_\Gamma \sigma d\Gamma = \int_{\Omega_f} q d\Omega_f.$$

La dérivation des lois mésoscopiques a été étudiée dans des cas simplifiés (milieu saturé, fluide monophasique, double-couche électrique monodimensionnelle, incompressibilité, ...) par différents techniques, lois de mélanges thermodynamiques [14] ou [32], développement asymptotique périodique [54] et [67].

2.4.2 Modèle mésoscopique

Avec des hypothèses de périodicité, par exemple de période ε , on peut alors utiliser les développements asymptotiques et la moyenne spatiale sur le volume élémentaire se réduit à la moyenne sur la cellule

$Y = Y_s \cup Y_f$ renormalisée ($y = x/\varepsilon$) notée $\langle \rangle_Y$. Par identification des puissances de même ordre dans les développements on obtient alors [54] le modèle mésoscopique suivant.

Les grandeurs mésoscopiques sont :

$$\sigma_T^0 = -\alpha p_D^0 + C_s \varepsilon_x(u^0) - \Pi_*^0, \text{ contrainte poro-élastique de Terzaghi} \quad (22)$$

$u^0(x, t) \equiv$ déplacement global des particules

$\alpha \equiv$ coefficients de Biot des particules

$\Pi_*^0 \equiv$ tenseur des contraintes physico-chimiques (incluant les contraintes de gonflement)

$C_s \varepsilon_x(u^0) \equiv$ contraintes de contact

$p_D^0 \equiv$ pression de filtration du solvant (associée au potentiel chimique de l'eau)

$C_s \equiv$ tenseur des coefficients d'élasticité global du solide

et

$$V_D^0 = -K \nabla_x p_D^0 - K_{(+)} \nabla_x n_D^{+0} - K_{(-)} \nabla_x n_D^{-0}, \text{ vitesse de filtration} \quad (23)$$

$K \equiv$ tenseur de perméabilité de la solution aqueuse

$n_D^{+0}, n_D^{-0} \equiv$ concentration apparente de cations, anions

$K_{(+)}, K_{(-)} \equiv$ tenseurs de perméabilité aux électrolytes.

Les lois de conservations globales correspondantes sont alors dans Ω tout entier :

$$\nabla_x \cdot V_D^0 + \alpha : \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_x(u^0) = \beta \frac{\partial p_D^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla_y \cdot u_{\Pi}^1 \rangle_Y \quad (24)$$

$u_{\Pi}^1(x, y, t) \equiv$ déplacement des particules induit par les effets physico-chimiques locaux

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma_{\pm} n_D^{\pm 0}) = \nabla_x \cdot (D_{\pm}^* \nabla_x n_D^{\pm 0}) \quad (25)$$

avec

$\gamma_{\pm} = \langle \exp(\mp \frac{e\phi^0}{kT}) \rangle_{Y_f} \equiv$ coefficient global de distribution de Boltzman

$D_{\pm}^* \equiv$ coefficients de diffusion ions $^{\pm}$ / eau dépendant du potentiel électrique ϕ^0 .

3 Lois de filtration des fluides multiphasiques

Introduction

On présente dans ce qui suit les différents modèles utilisés pour décrire la filtration de fluides multiphasiques à travers des milieux poreux. Pour cela, on considère un cas idéal où l'on a deux fluides ou deux phases (eau et air, pétrole et eau, ...) que l'on supposera pour simplifier incompressibles dans un milieu poreux incompressible. On supposera aussi, pour simplifier, que la saturation résiduelle minimum en eau $S = S_m$ est nulle ($S_m = 0$) et que la saturation résiduelle maximale $S = S_M$ est égale à 1; si çà n'est pas le cas alors le changement d'inconnue $S = \frac{S - S_m}{S_M - S_m}$ ramène la saturation entre $[0, 1]$. Les équations modélisant les écoulements des fluides miscibles, importantes dans le cas de la modélisation de transport de polluants seront déduites de celles du cas immiscible dans le modèle de Leverett.

Finalement, on explicitera dans un dernier paragraphe les liens existants entre les différentes modélisations.

Les différents problèmes de changement d'échelle macroscopique - mésoscopique (de l'échelle du laboratoire à l'échelle du domaine; de l'échelle des données géologiques à l'échelle des mailles de calcul) sont présentés dans un chapitre de [43] joint en annexe.

3.1 Modèle de Leverett de fluides immiscibles

Ce modèle [47] utilise le concept de perméabilité relative supposant que chaque phase se comporte suivant une loi de Darcy mais avec dépendance de la saturation. Dans chaque phase $\xi = \alpha, \beta$ on a donc un écoulement dont le débit est donné par

$$q_\xi = -K(X) \Lambda_\xi(S) (\nabla p_\xi - \rho_\xi g \nabla z) \quad (26)$$

où

- $K(X)$ est la perméabilité de la roche pour un quelconque écoulement monophasique (appelée perméabilité absolue), dépendant éventuellement de la position $X = (x, y, z)$ dans la nappe ou le réservoir $\Omega \subset \mathbb{R}^3$;
- $\Lambda_\xi(S) = \frac{k_{r\xi}(S)}{\mu_\xi}$ est la mobilité relative de la phase ξ et $k_{r\xi}(S)$ est la perméabilité relative de la roche à l'écoulement de la phase ξ en présence de l'autre phase dans un pourcentage donné par S la saturation de la phase mouillante (les courbes sont des données acquises généralement par des mesures); μ_ξ et ρ_ξ sont la viscosité et la densité de la phase ξ ; g est l'intensité de la gravité dans la direction $(0, 0, z)$.

La roche et les fluides étant incompressibles, l'accumulation est due uniquement à un changement dans la saturation ce qui donne pour chaque phase $\xi = \alpha, \beta$ la loi de conservation :

$$\phi(X) \frac{\partial(S_\xi \rho_\xi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\xi q_\xi) = f_\xi, (X, t) \in \Omega \times]0, T[\quad (27)$$

où f_ξ est la densité massique de fluide ξ injecté ou produit et $\phi(X)$ est la porosité de la roche au point X , c'est-à-dire la fraction de volume accessible aux fluides.

Les inconnues étant la saturation S_ξ et la pression p_ξ dans chaque phase on adjoint à (26) et (27) deux autres équations de comportement :

$$S_\alpha + S_\beta = 1 \quad \text{et} \quad p_\alpha - p_\beta = P_c(S) \quad (28)$$

où $P_c(S)$ est une courbe de Pression Capillaire caractérisant à la fois la roche et les fluides (donnée par des mesures en laboratoire).

Historiquement, le modèle ci-dessus fut introduit dans les années 40 par divers auteurs, comme par exemple Wyckoff et Botset [68], Leverett [47] et [48] ou Muskat [56], essentiellement pour modéliser la récupération assistée du pétrole par injection d'eau ou de gaz dans un gisement. Une discussion des principes de ce modèle peut être trouvée par exemple dans [49], [64], [25] ou [37]. Plus tard il s'est avéré que ce même modèle est aussi utilisable pour modéliser les sols non saturés en eau [52] et [53] afin de prendre en compte le mélange eau-air.

On peut avec certaines hypothèses simplificatrices (essentiellement en supposant une relation entre la saturation et la tension superficielle) retrouver ce modèle par passage à l'échelle de la roche comme dans le cas Stokes-Darcy, (voir par exemple : [10], [50], [51]).

Du point de vue mathématique ce modèle a été assez bien étudié, voir par exemple [16], [25], [7], [39]. Les deux équations de conservation (27) pour $\xi = \alpha, \beta$ sont mal adaptées à une étude mathématique ou numérique, puisque dans les zones où $S = 1$ $k_{r\beta}(1) = 0$, donc l'équation de la phase β disparaît et de même dans les zones $S = 0$, $k_{r\alpha}(0) = 0$ et donc l'équation de la phase α disparaît. Du point de vue numérique, les codes de simulation de gisements pétroliers utilisent plutôt une formulation utilisant la pression capillaire (au lieu de la saturation) et la pression de l'huile p_β .

En supposant pour simplifier que l'on néglige la gravité, si on regarde les diverses énergies associées aux équations (26)–(27) on voit apparaître une “énergie capillaire” associée à un opérateur de type diffusion

$$\begin{aligned} E_{P_c} &\equiv \int_0^T \int_\Omega K(X) \frac{\Lambda_\alpha(S)\Lambda_\beta(S)}{\Lambda_\alpha(S) + \Lambda_\beta(S)} \frac{\partial P_c}{\partial S} |\nabla S|^2 dX dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega K(X) a(S) |\nabla S|^2 dX dt \end{aligned}$$

une “énergie visqueuse”

$$E_V \equiv \int_0^T \int_\Omega \frac{\Lambda_\alpha \nabla p_\alpha + \Lambda_\beta \nabla p_\beta}{\Lambda_\alpha + \Lambda_\beta} q_T dX dt$$

associée au “débit total”

$$q_T = q_\alpha + q_\beta = -K(X)(\Lambda_\alpha \nabla p_\alpha + \Lambda_\beta \nabla p_\beta)$$

et finalement une énergie “cinétique”

$$E_c \equiv \int_0^T \int_\Omega |q_T|^2 dX dt$$

Ces diverses énergies peuvent s'écrire comme des formes quadratiques grâce à l'introduction d'une “saturation potentielle” Z et d'une “pression potentielle” P définies par:

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^S \left(\frac{\Lambda_\alpha(s)\Lambda_\beta(s)}{\Lambda_\alpha(s) + \Lambda_\beta(s)} \frac{\partial P_c}{\partial s} \right)^{1/2} ds \\ \nabla P &= \frac{\Lambda_\alpha \nabla p_\alpha + \Lambda_\beta \nabla p_\beta}{\Lambda_\alpha + \Lambda_\beta} \end{aligned}$$

qui permettent d'écrire l'“énergie capillaire” comme

$$E_{P_c} = \int_0^T \int_\Omega K(X) |\nabla Z|^2 dX dt$$

et “l'énergie visqueuse”

$$E_V = \int_0^t \int_\Omega K(X) (\Lambda_\alpha + \Lambda_\beta) |\nabla P|^2 dX dt.$$

On se retrouve alors grâce à l'introduction de ces nouvelles inconnues Z et P en face d'une formulation en énergie plus facile à analyser du point de vue mathématique. Finalement, dans les inconnues S et P les équations (26) et (27) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot (a(S)K(X)\nabla S - b(S)q_T - b_g(S)\nabla p_g) &= f_\alpha \\ \nabla \cdot q_T &= f_\alpha + f_\beta \end{aligned} \quad (29)$$

où $b(S)$ est le débit relatif de α ,

$$b(S) = \frac{\Lambda_\alpha(S)}{\Lambda_\alpha(S) + \Lambda_\beta(S)}$$

et p_g est le potentiel de gravité

$$p_g = \frac{1}{2}(\rho_\alpha + \rho_\beta)gz.$$

Ces dernières équations forment alors un système, quasi linéaire, parabolique-elliptique qui dégénère pour $S = 0$ ou $S = 1$ car $a(0) = a(1) = 0$. Cependant cette forme se prête bien à un traitement numérique par éléments finis mixtes ou par volume finis (voir par exemple [25], [37] ou [44]).

Remarque 7. Dans le cas où la pression capillaire est négligeable ($a(S) \simeq 0$) le système précédent devient alors de type hyperbolique-elliptique pouvant exhiber des discontinuités de saturations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot F(S, p) &= f_\alpha \\ \nabla \cdot q_T(S, p) &= f_\alpha + f_\beta \end{aligned} \quad (30)$$

avec $F(S, p) = -b_g(S)\nabla p_g - b(S)q_T$.

Ce système sans pression capillaire appelé système de Buckley-Leverett, a aussi donné lieu à une importante littérature (voir par exemple : [39], [41], [46]) tant du point de vue théorique que numérique.

Remarque 8. Une des dernières propriétés intéressantes du système (29) est de redonner le modèle gouvernant le transport de soluté par diffusion-convection, ou la filtration de deux fluides totalement miscibles (dans un pourcentage c appelé concentration) formant une seule phase qui filtre comme un seul fluide. On peut alors montrer (voir [24]) qu'en choisissant de façon ad-hoc les paramètres et fonctions dans (27)-(29) en prenant dans (29) un seul fluide dont le débit est v on retombe bien sur (31) avec $D = D(X)$:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{K(X)}{\mu(c)}\nabla p \\ \phi \frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (D\nabla c) + v \cdot \nabla c &= -cv \end{aligned} \quad (31)$$

où c est alors la concentration et où la viscosité du mélange $\mu(c)$ provient du mélange des deux fluides de viscosité μ_α et μ_β .

Cependant la modélisation du transport de soluté comporte en plus un effet de dispersion hydrodynamique, c'est-à-dire que $D = \phi d_m I + D(v)$ est la somme d'un tenseur diagonal de diffusion moléculaire $d_m I$ et d'un tenseur de dispersion D dépendant du débit v . Ce tenseur de dispersion peut être déduit à partir du niveau microscopique par diverses méthodes de changement d'échelles (voir par exemple : [9], [62], [30], [58]) et le terme de dispersion provient alors du terme convectif dans l'échelle microscopique supposé suffisamment important (nombre de Peclet macroscopique $\simeq O(1/\varepsilon)$) pour rester après le changement de variable $Y = X/\varepsilon$ (voir par exemple le paragraphe 2.1) dans le problème auxiliaire défini sur une cellule (cas périodique) ou sur tout \mathbb{R}^3 (pour le cas stochastique).

Du fait de la partie convective qui est linéaire dans (31), les méthodes lagrangiennes ou de caractéristiques sont particulièrement bien adaptées et efficaces (voir par exemple : [8], [31], [34] et [37]).

3.2 Modèle de Muskat

Ce modèle [55] décrivant la dynamique de la frontière libre entre les deux fluides immiscibles, fut initialement dérivé par Muskat pour décrire l'évolution du cône d'eau sous un puit de production de pétrole.

Pour cela le réservoir est décomposé en deux domaines $\Omega_\alpha(t)$ (qui est occupé par le fluide α) et $\Omega_\beta(t)$ (occupé par le fluide β) séparés par une frontière libre $\Sigma(t)$.

Dans $\Omega_\alpha(t)$ et $\Omega_\beta(t)$ on a les lois de conservation :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V_\alpha &= \nabla \cdot \left[-\frac{K_\alpha}{\mu_\alpha} \nabla(p_\alpha - \rho_\alpha g z) \right] = f_\alpha \quad \text{dans } \Omega_\alpha(t), \\ \nabla \cdot V_\beta &= \nabla \cdot \left[-\frac{K_\beta}{\mu_\beta} \nabla(p_\beta - \rho_\beta g z) \right] = f_\beta \quad \text{dans } \Omega_\beta(t). \end{aligned} \quad (32)$$

Sur la frontière Σ entre les deux fluides (supposée continue) on a continuité des pressions (la pression capillaire est supposée négligeable) et des flux à travers cet interface $\Sigma(t)$:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= p_\beta \\ V_\alpha &\equiv -\frac{K(X)}{\mu_\alpha} \nabla(p_\alpha - \rho_\alpha g z) = -\frac{K(X)}{\mu_\beta} \nabla(p_\beta - \rho_\beta g z) \equiv V_\beta, \quad \text{sur } \Sigma(t). \end{aligned} \quad (33)$$

Le mouvement de cette frontière $\Sigma(t)$ est caractérisé par sa vitesse normale V_η :

$$V_\eta \equiv \frac{V_\alpha}{\phi_\alpha(X)} \cdot \eta = \frac{V_\beta}{\phi_\beta(X)} \cdot \eta \quad ; \quad \eta \equiv \text{normale à } \Sigma. \quad (34)$$

On peut remarquer que ce dernier modèle peut être considéré comme un cas particulier du modèle précédent [25], en supposant que $P_c(S) = 0$ et que l'on a des courbes de perméabilités relatives $k_{r\xi}$ indépendantes de la localisation X , car alors (29) donne :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot q &= f_\alpha + f_\beta \\ q &= -K(X)(\Lambda_\alpha(S) + \Lambda_\beta(S)) \nabla(p - \rho(S) g z) \end{aligned} \quad (35)$$

et

$$\begin{aligned} \phi(X) \frac{\partial S}{\partial T} + \nabla \cdot Q(S) &= f_\alpha \\ Q(S) &= -K(X) \frac{\Lambda_\alpha(S) \Lambda_\beta(S)}{\Lambda_\alpha(S) + \Lambda_\beta(S)} (\rho_\alpha - \rho_\beta) g \nabla z + \frac{\Lambda_\alpha(S)}{\Lambda_\alpha(S) + \Lambda_\beta(S)} q \end{aligned} \quad (36)$$

où l'on a défini $p = p_\alpha$ et $S = 1$ dans Ω_α , $p = p_\beta$ et $S = 0$ dans Ω_β (d'où le nom d'écoulement "piston") et où on a pris $K_\xi = K(X) k_{r\xi}(S)$, $\Lambda_\xi(S) = \frac{k_{r\xi}(S)}{\mu_\xi}$ la mobilité de la phase ξ . La relation de Rankine-Hugoniot qui donne la vitesse V_η normale au front pour l'équation hyperbolique (36) est alors, avec les conditions choisies pour p et S dans (35)-(36) :

$$V_\eta = \frac{q \cdot \eta}{\phi} = \frac{Q(1) - Q(0)}{\phi} \cdot \eta \quad (37)$$

d'après les propriétés de monotonie des perméabilités relatives; ce qui n'est rien d'autre que l'équation (34) du modèle de Muskat.

Alors, la condition d'entropie, nécessaire pour avoir une solution unique et physiquement acceptable, est donnée par :

$$(Q(s) - sq) \cdot \eta \leq 0 \quad \forall s \in [0, 1], \quad (38)$$

si η est orientée de telle façon que S soit décroissant dans cette direction.

3.3 Modèle de frontière libre de Baiocchi

Ce modèle fut introduit dans les années 70 par Baiocchi [11] pour modéliser la frontière eau-air à l'intérieur d'une digue poreuse; ce modèle suppose l'eau incompressible et la frontière Σ , séparant le domaine Ω_α envahi par l'eau du domaine Ω_β occupé par l'air, continue.

Dans le domaine Ω_α on a donc

$$-\nabla \cdot \left(\frac{K_\alpha}{\mu_\alpha} \nabla (p_\alpha - \rho_\alpha g z) \right) = f_\alpha \quad (39)$$

et dans le domaine Ω_β on a

$$p_\beta = Cte = P_{atm}. \quad (40)$$

Sur la frontière libre séparant Ω_α et Ω_β il y a continuité de la pression (la pression capillaire est négligée) :

$$p_\alpha = p_\beta \quad \text{sur} \quad \Sigma \quad (41)$$

et la vitesse normale V_η de déplacement de Σ est donnée par :

$$V_\eta = \frac{-\frac{K_\alpha}{\mu_\alpha} \nabla (p_\alpha - \rho_\alpha g z)}{\phi} \cdot \eta \quad (42)$$

où η est la normale à la frontière dirigée de l'eau vers l'air.

Remarque 9. Si on compare les deux derniers modèles de frontière libre, celui de Muskat et celui de Baiocchi, on peut voir [25] que, formellement, ce dernier est la limite du précédent quand la viscosité μ_β et la densité ρ_β tendent vers zéro (comparer (32) et (39)-(40),(42) et (33)-(34)). On peut aussi vérifier [25] que la condition d'entropie (38) du modèle de Muskat est vérifiée dans le cas où le niveau d'eau est croissant.

Remarque 10. D'un point de vue mathématique ce problème a été beaucoup étudié car, tant du point de vue théorique que du point de vue numérique il se ramène grâce à une transformation ad-hoc, voir par exemple Baiocchi [11] ou Friedman-Torelli [38], à une équation variationnelle, (cas stationnaire) ou à une inéquation variationnelle (cas instationnaire).

3.4 Modèle de Richards

Ce modèle a été initialement proposé [59], [60] pour étudier l'évolution de l'humidité dans un sol non saturé, en vue d'applications agricoles. Il a été beaucoup étudié depuis les années 1950 (voir par exemple Gilding-Peletier [40]) à la fois du point de vue théorique et numérique.

On peut suivant [52]-[53] montrer que ce modèle est une approximation du modèle de Leverett en supposant l'eau et la roche incompressibles, les courbes de Pression capillaire et de Perméabilités relatives indépendantes de X et finalement l'air restant à la pression atmosphérique.

Bien que cette dernière hypothèse ne traduise pas la difficulté de l'air à s'échapper du sol, causant en retour une infiltration d'eau en quantité moindre, cette approximation est encore très populaire particulièrement en pédologie et agriculture, ceci essentiellement pour son écriture, à première vue, assez proche du cas monophasique qui laisse croire, à tort, à la simplicité du traitement numérique associé.

En effet la forme traditionnelle de l'équation de Richards est :

$$\frac{\partial}{\partial t} C_H(F_H) - \Delta F_H + \frac{\partial K_H}{\partial z} = 0 \quad (43)$$

où

$C_H(F_H) = \theta = \phi S$ est l'inconnue principale

$K_H(\theta)$ est la conductivité hydraulique

$F_H(\theta) = \int_{\phi}^{\theta} K_H(s) \frac{d\psi}{ds}(s) ds$ est le potentiel de Kirchoff

$D(\theta) = K_H(\theta) \frac{d\psi}{d\theta}(\theta)$ est la diffusivité

$\psi(\theta)$ est la suction. Pour apprécier la nature et les difficultés de ce modèle on peut se ramener à des grandeurs utilisées dans le modèle de Leverett grâce aux changements de fonction suivants :

$$\begin{aligned} K(X) \frac{K_{r\alpha}(S)}{\mu_{\alpha}} \rho_{\alpha} g &= K_H(\theta), \quad k_{r\alpha}(S) \rho_{\alpha} g = R(S); \\ P_C(S) / \rho_{\alpha} g &= \psi(\theta), \quad \text{où } \alpha \text{ est la phase aqueuse et } \beta \text{ l'air.} \end{aligned}$$

En notant comme précédemment F , le potentiel de Kirchoff, $\frac{K(X)}{\mu_{\alpha}} F(S) = F_H(\theta)$, (43) s'écrit :

$$\varphi \frac{\partial C(F)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{K}{\mu_{\alpha}} \{ \nabla F - k_{r\alpha}(C(F)) \} \rho_{\alpha} g \nabla z \right) = 0 \quad (44)$$

où la saturation S est l'inconnue principale et C est la fonction réciproque de $F(S)$.

L'équation (44) est alors de type parabolique lorsque F est < 0 (zone non saturée $S < S_M$ et $p_{\alpha} < p_{\beta}$) et de type elliptique lorsque $F > 0$ (zone saturée $S = S_M$ et $p_{\alpha} \geq p_{\beta}$, $F(S_M) = 0$, $C(0) = 1 = Cte$); dans le cas $C(F) > 0$, $\forall F$, ($S > S_M \geq 0$) l'équation (44) a une singularité pour $F = 0$ mais par contre si on permet des zones sèches ($S = 0 = C(F_*)$) alors $C(F)$ doit s'annuler pour certaines valeurs de F , ($F(0) = F_*$) ajoutant alors dans (44) des nouvelles singularités pour ces valeurs $F = F_*$.

En s'inspirant de [25] on présente ci-après les correspondances entre ces diverses lois.

4 Transport par déplacement de fluides dans un milieu poreux

4.1 Equation d'un déplacement miscible incompressible dans un milieu poreux

Dans le domaine poreux concerné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, la concentration C de l'espèce chimique considérée dans la phase liquide est régit par une équation de transport de masse :

$$\phi R \frac{\partial C}{\partial t} + \lambda \phi R C - \nabla \cdot (\phi D \nabla C) + \nabla C \cdot \vec{U} + \frac{\partial S}{\partial t} = q^I (C^I - C) \quad (45)$$

où le débit volumique (vitesse de Darcy) est donné par

$$\vec{U} = -K \nabla (P - \rho g Z) / \mu(C) \quad (46)$$

qui vérifie l'équation de conservation :

$$\nabla \cdot \vec{U} = q^I; \quad (47)$$

avec les conditions au bord de pression P et de concentration C (Dirichlet, Neumann, mixtes) et une condition initiale $C(x, 0) = C^0(x)$,

R est un facteur de latence (Retard) dépendant du milieu poreux, par (x, ϕ) , dépendant de l'isotherme régissant la réaction (dissolution précipitation) supposée à l'équilibre (avec éventuellement $K_d \equiv$ coefficient de sorption ou de partition).

L'évolution de la concentration S dans la phase solide de l'espèce considérée en fonction de la concentration dans la phase liquide de la mme espèce (réaction - sorption) est représentée par le terme $\frac{\partial S}{\partial t}$.

Le taux de décroissance radioactive est $\lambda \equiv \frac{\log 2}{T}$ (pour l'espèce dont le demi-temps de vie est T .)

La porosité est ϕ ; dont le tenseur de diffusion dispersion dépend de la vitesse de Darcy, $D = d_{m0}I + |U|(d_l E(U) + d_t E^t(U))$ où $E_{ij}(U) = \frac{u_i u_j}{|u|^2}$, $E^t(U) = I - E(U)$; K est le tenseur de perméabilité de la roche et μ est la viscosité, pouvant dépendre de la concentration, $\mu(C) = \mu(0)(1 + (M^{1/4} - 1)C)^{-4}$ avec $M \equiv \mu(0)/\mu(1)$. La source q^I injecte un débit de fluide de concentration C^I .

On a donc un système couplé d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Une des équations étant elliptique (respectivement parabolique), pour la pression P du fluide, si les fluides sont incompressibles (respectivement, compressibles) et l'autre est de type parabolique pour la concentration d'une espèce dans sa phase fluide. Ce système est compliqué par le fait qu'il peut être couplé par la loi reliant la viscosité à la concentration, et la dépendance du tenseur de dispersion en la vitesse qui a priori n'est pas bornée.

Dans le cas incompressible où il n'y a pas de réaction-sorption et où de plus il n'y a pas de couplage dû à la dispersion et à la viscosité ($\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, $R = R(x, \varphi)$), les deux équations se découpent et conduisent aux régularités (et unicité) classiques [45]. Le cas sans réaction-sorption mais avec couplage (Dispersion et viscosité) donne [28] l'existence d'une solution faible

$$\begin{aligned} (P, C) &\in (L^\infty(0, T; V + \varphi_p), L^2(0, T; W + \varphi_C); \phi \frac{\partial C}{\partial t} \in L^2(0, T; W^*(U))); \\ C(x, t) &\in [0, 1] \text{ p.p. sur } \Omega \times]0, T[\text{ pour des conditions aux bords très générales} \\ V &= W = H_0^1(\Omega), W(U) = \{s \in W : (D(U)\nabla s, \nabla s) < +\infty\} \\ &\text{si par exemple } P = \varphi_p(x, t) \text{ et } C = \varphi_C(x, t) \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[. \end{aligned}$$

Du point de vue numérique les méthodes d'éléments finis ont été appliquées et étudiées extensivement pour le cas incompressible voir par exemple [33] et le cas faiblement compressible a été étudié dans [35]. Dans le cas où il y a réaction-sorption ($\frac{\partial S}{\partial t} \neq 0$, $R(x, \varphi, C, K_d, \dots)$) le splitting (c'est-à-dire la résolution en deux demi pas de temps : le premier demi-pas de temps où on actualise la concentration en ne considérant que la partie transport, sans réaction, de (45) et le second demi-pas de temps où on rétablit "l'équilibre chimique" en résolvant uniquement la partie réaction) peut poser problème du point de vue numérique, voir par exemple [12].

4.2 Equation d'un transport d'espèces par écoulement diphasique incompressible dans un milieu poreux

Le mélange eau-air caractérisant les milieux insaturés [52], [53] est un exemple d'écoulement diphasique où cette modélisation peut tre utilisée. Dans le domaine poreux $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ on a pour chaque phase, $\alpha = \omega$ (phase mouillante, eau par exemple), $\alpha = n$ (phase non mouillante, air par exemple), une équation de conservation :

$$\varphi \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha S_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha U_\alpha) = \rho_\alpha q_\alpha \quad (48)$$

où $\rho_\alpha, S_\alpha, U_\alpha$ et q_α sont respectivement la densité, la saturation, le débit volumique et la densité de source volumique de la phase α . Le débit U_α est donné par une loi de Darcy généralisée (non linéaire) :

$$U_\alpha = -K \frac{k_{r\alpha}(x, S_\alpha)}{\mu_\alpha} (\nabla P_\alpha - \rho_\alpha g Z), \alpha = \omega, n, \quad (49)$$

où P_α, μ_α et $k_{r\alpha}$ sont respectivement la pression, la viscosité et la perméabilité relative de la phase α . En addition les saturations sont reliées par

$$S_\omega + S_n = 1 \quad (50)$$

et les deux vecteurs pressions sont reliés par une fonction donnée, appelée Pression Capillaire :

$$p_c(S_w) = P_n - P_w. \quad (51)$$

Le système (48)-(51) a été étudié extensivement du point de vue mathématique, voir par exemple [7], [24], [25],[39], [6] et de nombreuses études numériques lui ont été consacrés compte tenu de l'application de cette modélisation à la récupération assistée du pétrole, voir par exemple [28], [37] ou [25].

Avec l'écoulement des fluides spécifié comme ci-dessus, on peut maintenant ajouter l'équation du transport d'un constituant chimique; ce constituant pouvant être transporté dans chacune des phases. Si C_α dénote la concentration massique de la phase fluide du constituant dans la phase α , alors on a dans chaque phase :

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha S_\alpha C_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha U_\alpha C_\alpha - \phi \rho_\alpha S_\alpha D_\alpha \nabla C_\alpha) + \phi r_\alpha \rho_\alpha S_\alpha C_\alpha = \hat{C}_\alpha \rho_\alpha \hat{q}_\alpha; \quad \alpha = n, w \quad (52)$$

où D_α , r_α et \hat{C}_α sont respectivement le tenseur de diffusion-dispersion, le taux de réaction ou la décroissance radioactive et la concentration injectée dans la source pour la phase α . (D_α donné pour une formule analogue au cas monophasique dans chaque phase) En plus des couplages, les difficultés ici sont liées à la dégénérescence des équations de saturation ($k_{r\alpha}(S_\alpha) = 0$ pour $S_\alpha = 1$); le nombre d'équations n'est pas connu a priori à une place donnée du milieu poreux. Il est donc nécessaire comme précédemment (voir la formulation des écoulements multiphasiques immiscibles) de réécrire ces équations dans de nouvelles variables afin de pouvoir en faire une analyse mathématique. Pour cela on définit dans chaque phase $\alpha = n, w$ les mobilités

$$\lambda_\alpha(x, S_\alpha) = \frac{k_{r\alpha}(x, S_\alpha)}{\mu_\alpha} \quad (53)$$

et les débits fractionnels

$$f_\alpha(x, S) = \lambda_\alpha / (\lambda_w + \lambda_n) \quad (54)$$

ainsi que le débit total $U = U_n + U_w$ et la mobilité totale $\lambda = \lambda_w + \lambda_n$, en utilisant la notion de pression réduite

$$p = P_n - \int_0^S (f_w \frac{\partial P_c}{\partial S})(x, s) ds \quad (55)$$

et de pression complémentaire

$$\theta = - \int_0^S (f_w f_n \frac{\partial P_c}{\partial S})(x, s) ds, \quad S = \theta^{-1}. \quad (56)$$

Sous l'hypothèse d'incompressibilité, (48) devient l'équation de pression :

$$\nabla \cdot U = q \equiv q_w + q_n, \quad (57)$$

(49) donne

$$U = -K(\lambda \nabla p + \gamma_1(S_w, C_w)) \quad (58)$$

(48) et (49) donnent, en notant comme dans (55) et (56) $S \equiv S_w$ et $C = C_w$ l'équation de saturation :

$$\varphi \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot \{K(\lambda \nabla \theta + \lambda_w \nabla p + \gamma_w(S, C))\} = q_w \quad (59)$$

où

$$U_w = -K(\lambda \nabla \theta + \lambda_w \nabla p + \gamma_w(S, C)) \quad (60)$$

$$U_n = K(\lambda \nabla \theta - \lambda_n \nabla p + \gamma_n(S, C)) \quad (61)$$

En résumé, dans le cas incompressible, de (57) - (61) on obtient en notant

$$D(S, U_w, U_n) = \phi(S_w D_w + S_n D_n) \quad \text{et} \quad R(S, r_w, r_n) = \phi(S_w r_w + S_n r_n)$$

le système d'équations

$$-\nabla \cdot \{K(\lambda(S, C) \nabla p + \gamma_1(S, C))\} = q(S, C) \quad (62)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot \{K(\lambda(S, C) \nabla \theta + \lambda_w(S, C) \nabla p + \gamma_w(S, C))\} = q_w \quad (63)$$

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} - \nabla \cdot \{D(S, U_w, U_n) \nabla C - UC\} + R(S, r_w, r_n)C = \hat{C} \hat{q}(S, C) \quad (64)$$

avec les conditions au bord sur U , p et θ et les conditions initiales

$$\theta(x, 0) = \theta^0(x), \quad C(x, 0) = C^0(x).$$

On a alors existence d'une solution faible de (62) - (64), avec les hypothèses classiques sur les coefficients et fonctions de régularité, positivité et de borne, (voir [28]).

$$(p, \theta, C) \in L^\infty(0, T; V + \varphi_p), \quad L^2(0, T; W + \varphi_\theta), \quad L^2(0, T; \Lambda(S, U_w, U_n) + \varphi_C)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} \in L^2(0, T; W^*), \quad \phi \frac{\partial C}{\partial t} \in L^2(0, T; \Lambda^*)$$

$$\theta(x, t) \in [0, \theta^*(x)], \quad C(x, t) \in [0, 1], \quad \text{p.p. sur } \Omega \times]0, T[$$

avec par exemple $V = H_0^1(\Omega) = \Lambda = W$ et

$$(p, \theta, c)|_{\partial\Omega} = (\varphi_p, \varphi_\theta, \varphi_C) \quad , \quad \Lambda(S, U_w, U_n) = \{C \in \Lambda : (D(S, U_w, U_n) \nabla C, \nabla C) < \infty\}.$$

Du point de vue numérique, ce dernier modèle a été étudié par exemple dans [26], [27], [29].

Remarque. Dans le cas du transport de multiespèces on a donc une équation du même type que (52) associé à la concentration $C_{\alpha,i}$ de chaque espèce i (isotope ou élément) dans la phase α et éventuellement des filiations isotopiques (de la forme $\sum_{j=1}^{j=i+k} r_{\alpha,i}^j C_{\alpha,j}$, pour k "fils") au lieu de simple décroissance radioactive $r_{\alpha,i} C_{\alpha,i}$.

Remarque. Il apparait dans le modèle ci-dessus, (62) - (64), diverses échelles de temps:

- un temps caractéristique de la diffusion, $T_D = \frac{\phi L^2}{\|D\|}$
- un temps caractéristique de la convection, $T_U = \frac{\phi L}{|U|}$
- un temps caractéristique de réaction, $T_R = \frac{\phi}{|R|}$.

Si il y a plusieurs espèces, on peut même avoir, pour chaque paramètre, diffusion - convection - réaction, des temps caractéristiques de chaque espèce $T_{D,U,R}^i$.

Toutes ces échelles de temps ne sont pas forcément du même ordre et peuvent nécessiter des problèmes de stabilité pour le choix des pas de temps dans les simulations numériques.

References

- [1] G. Allaire. Continuity of the Darcy's law in the low-volume fraction limit. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 18:475–499, 1991.
- [2] G. Allaire. Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets with tiny holes i: Abstract framework, a volume distribution of holes. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 113:209–259, 1991.
- [3] G. Allaire. Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets with tiny holes ii: Non-critical sizes of the holes for a volume distribution and a surface distribution of holes. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 113:261–298, 1991.
- [4] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6):1482–1518, 1992.
- [5] G. Allaire. Homogenization of the unsteady Stokes equation in porous media. In C. Bandle et al, editor, *Progress in partial differential equations: calculus of variations, applications*, number 267 in Pitman Research Notes in Mathematics Series, pages 109–123, New York, 1992. Longman Higher Education.
- [6] H. W. Alt and S. Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. pages 311–341, 1983.
- [7] S. N. Antonsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakov. *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [8] T. Arbogast and M. F. Wheeler. A characteristic mixed finite element method for advection-dominated transport problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 32:404 – 424, 1995.
- [9] R. Aris. On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube. *Proc. Roy. Soc. London*, A 235:67 – 77, 1956.
- [10] J.-L. Auriault and E. Sanchez-Palencia. Remarques sur la loi de Darcy pour les écoulements biphasiques en milieu poreux. *J.M.T.A., Numéro spécial "Modélisation asymptotique d'écoulements de fluides"*, pages 141–156, 1986.
- [11] C. Baiocchi. Problèmes à frontière libre en hydraulique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A*, 278:1201 – 1204, 1974.
- [12] D. A. Barry, C. T. Miller, and P. J. Culligan-Hensley. Temporal discretization errors in non-iterative split-operator approaches to solving chemical reaction/groundwater transport models. *J. of Contaminant Hydrology*, 22:1–17, 1996.
- [13] A. Yu. Beliaev and S. M. Kozlov. Darcy equation for random porous media. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49(1):1–34, 1995.
- [14] L. S. Bennethum and J. H. Cushman. Multicomponent, multiphase thermodynamics of swelling porous media with electroquasistatics, i - macroscale field equations et ii - constitutive theory. *UCD/CCM Reports no. 144 et no. 157*, 2000.
- [15] A. Bourgeat et al., editor. *Mathematical Modelling of flow through porous media*. World Scientific Pub, Singapore, 1995.

- [16] A. Bourgeat and A. Hidani. A result of existence for a model of two-phase flow in a porous medium made of different rock types. *Applicable Analysis*, 56:381–399, 1995.
- [17] A. Bourgeat and E. Marusic-Paloka. Non linear effects for flows in periodically constricted channel caused by high injection rate. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 8(3):379–405, 1998.
- [18] A. Bourgeat, E. Marusic-Paloka, and A. Mikelic. Weak non linear correction for Darcy’s law. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 6(8):1143–1155, 1996.
- [19] A. Bourgeat, A. Mikelic, and A. Piatnitski. Modèle de double porosité aléatoire. *C. R. A. S.*, 327, série I:99–104, 1998.
- [20] A. Bourgeat, A. Mikelic, and S. Wright. Stochastic two-scale convergence in the mean and applications. *J. reine angew. Math.*, 456:19–51, 1994.
- [21] A. Bourgeat and E. Marusic Paloka. Mathematical modelling of a non newton viscous flow through a thin filter. *C. R. A. S.*, 327, série I:607–612, 1998.
- [22] A. Bourgeat and M. Panfilov. Effective two phase flow through highly heterogeneous porous media : capillary non equilibrium effects. *Computational Geosciences*, 2:191–215, 1998.
- [23] A. Bourgeat, M. Panfilov, and L. Pankratov. A general double porosity model. *C. R. A. S.*, 237, série II b:1245–1250, 1999.
- [24] G. Chavent. The global pressure, a new concept for the modelization of compressible two-phase flows in porous media. In *Proceedings of Euromech 143*. Delft, 1981.
- [25] G. Chavent and J. Jaffré. *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*. Elsevier Science, Amsterdam, 1986.
- [26] Z. Chen, M. Espedal, and R. Ewing. Continuous time finite element analysis of multiphase flow in groundwater hydrology. *App. Math.*, 20:203–226, 1995.
- [27] Z. Chen and R. Ewing. Fully discrete finite element analysis of multiphase flow in groundwater hydrology. *SIAM J. Num. Anal.*, 34:2228–2253, 1997.
- [28] Z. Chen and R. Ewing. Mathematical analysis for reservoir models. *SIAM J. Math. Anal.*, 30(2):431–453, 1999.
- [29] Z. Chen, R. Ewing, and M. Espedal. Multiphase flow simulation with various boundary conditions. In A. Peters et al., editor, *Numerical Methods in Water Resources*, 2, pages 925–932. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994.
- [30] G. Dagan. *Flow and Transport in Porous Formations*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [31] H. K. Dahle, R. E. Ewing, and T. F. Russell. Eulerian-Lagrangian localized adjoint methods for a nonlinear advection-diffusion equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 122:223 – 250, 1995.
- [32] L. Dormieux, P. Barboux, O. Coussy, and P. Dangla. A macroscopic model of the swelling phenomenon of a saturated clay. *Eur. J. Mech. A/solids*, 14(6):981–1004, 1995.
- [33] J. Douglas Jr., R. Ewing, and M. Wheeler. The approximation of the pressure by a mixed method in the simulation of miscible displacement. *RAIRO Anal. Num.*, 17:17–33, 1983.

- [34] J. Douglas, C. S. Huang, and F. Pereira. The modified method of characteristics with adjusted advection. *Numerische Mathematik*, 83:353 – 369, 1999.
- [35] J. Douglas Jr. and J. Robert. Numerical methods for a model for compressible miscible displacement in porous media. *Math. Comp.*, 41:441–459, 1983.
- [36] H. Ene and B. Vernescu.
- [37] R. E. Ewing. *The Mathematics of Reservoir Simulation*. Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, 1983.
- [38] A. Friedman and A. Torelli. A free boundary problem connected with non-steady filtration in porous media. *Nonlinear Analysis*, 1(5):503 – 545, 1976/77.
- [39] G. Gagneux and M. Madaune-Tort. *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*. Springer, SMAI, Maths et Appl. 22, 1996.
- [40] B. H. Gilding and L. A. Peletier. The Cauchy problem for an equation in the theory of infiltration. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 61:127 – 140, 1976.
- [41] E. Godlewski and P. A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*. ed. Ellipses, SMAI, Maths et Appl. 3-4, 1991.
- [42] W. Y. Gu, W. M. Lai, and V. C. Mow. A mixture theory for charged - hydrated soft tissues containing multi - electrolytes : passive transport and swelling behavior. *J. Biomech. Engrg*, 120:169–180, 1998.
- [43] U. Hornung ed. *Homogenization and Porous Media*. Springer-Verlag, 1997.
- [44] P. Joly. *Mise en œuvre de la méthode des éléments finis*. ed. Ellipses, SMAI, Maths et Appl. 2, 1990.
- [45] O. L. Ladyzenskaia, V. A. Solonikov, and N. N. Uralc'eva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Transl. Math. Monograph. 23, AMS, Providence, RI, 1968.
- [46] R. J. Leveque. *Numerical methods for conservation laws*. Birkhauser Verlag, 1990.
- [47] M. C. Leverett. Steady flow of gas-oil-water mixtures through unconsolidated sands. *Trans. AIME*, 132:149, 1938.
- [48] M. C. Leverett. Capillary behavior in porous solids. *Journal of Petroleum Technology*, pages 1–17, 1940.
- [49] C. M. Marle. *Multiphase Flow in Porous Media*. Technip, Paris, 1981.
- [50] C. M. Marle. On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media. *Int. J. Eng. Sci.* 20, pages 643–662, 1982.
- [51] A. Mikelic and L. Paoli. On the derivation of the Buckley-Leverett model from the two fluid Navier-Stokes equations in a thin domain. *Computational Geosciences*, 1:59 – 83, 1997.
- [52] H. J. Morel-Seytoux. Pour une théorie modifiée de l'infiltration. 1ère partie: Pourquoi? *Cahiers ORSTOM*, 10:185–194, 1973.

- [53] H. J. Morel-Seytoux. Pour une théorie modifiée de l'infiltration. 2ème partie: Comment? *Cahiers ORSTOM*, 10:199–209, 1973.
- [54] Ch. Moyne and M. Murad. Macroscopic behavior of swelling porous media derived from micromechanical analysis. *publication prévue dans Transport in Porous Media*, 2000.
- [55] M. Muskat. Two fluid system in porous media. the encroachment of water into an oil sand. *Physics. 5, Gulf Research and Development Corporation, Pittsburg, Pa*, 1934.
- [56] M. Muskat. *Physical Principles of Oil Production*. Mc Graw Hill, New York, 1949.
- [57] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20:608–629, 1989.
- [58] O. A. Plumb and S. Whitaker. Dispersion in heterogeneous porous media. *Water Resources Research*, 24(7):913 – 938, 1998.
- [59] L. A. Richards. The usefulness of capillary potential to soil moisture and plant investigation. *Ann. Agr. Res.*, 37:719–742, 1928.
- [60] L. A. Richards. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1:318–333, 1931.
- [61] B. Rose and W. A. Bruce. *Evaluation of Capillary Characters in Petroleum Reservoir Rock*. Trans AIME, 1949.
- [62] P. G. Saffman. A theory of dispersion in a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, 3:321 – 349, 1959.
- [63] E. Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, volume 129 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 1980.
- [64] A. E. Scheidegger. *The Physics of Flow Through Porous Media*. Mac Millan Co., 1957.
- [65] L. Tartar. Quelques remarques sur l'homogénéisation. In H. Fujita, editor, *Proc. of the Japan-France Seminar 1976, Functional Analysis and Numerical Analysis*, pages 469–481. Japan Society for the Promotion of Sciences, 1978.
- [66] L. Tartar. Incompressible fluid flow in a porous medium - convergence of the homogenization process. *in [63] 368-377*, 1980.
- [67] B. Vernescu.
- [68] R. D. Wyckoff and H. G. Botset. The flow of gas-liquid mixture through unconsolidated sands. *Physics*, 7:325, 1936.