

# Limite singulière d'un écoulement diphasique en milieu poreux quand la viscosité de l'air tend vers zéro

R. EYMARD, M. HENRY, D. HILHORST

Orsay, 20 Janvier 2009

► **Modèle Mathématique**

- 1 Ecoulements diphasiques
- 2 Modèle étudié

▶ **Modèle Mathématique**

- 1 Ecoulements diphasiques
- 2 Modèle étudié

▶ **Résultats formels quand  $\mu \downarrow 0$**

- ▶ **Modèle Mathématique**
  - 1 Ecoulements diphasiques
  - 2 Modèle étudié
- ▶ **Résultats formels quand  $\mu \downarrow 0$**
- ▶ **Résultats rigoureux et plan de la preuve**

- ▶ **Modèle Mathématique**
  - 1 Ecoulements diphasiques
  - 2 Modèle étudié
- ▶ **Résultats formels quand  $\mu \downarrow 0$**
- ▶ **Résultats rigoureux et plan de la preuve**
- ▶ **Tests numériques en 1D**

- ▶ **Modèle Mathématique**
  - 1 Ecoulements diphasiques
  - 2 Modèle étudié
  
- ▶ **Résultats formels quand  $\mu \downarrow 0$**
  
- ▶ **Résultats rigoureux et plan de la preuve**
  
- ▶ **Tests numériques en 1D**
  
- ▶ **Commentaires**

## Modèle Mathématique

### 1. Ecoulements monophasiques

- **Lois de conservation de la masse**

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = \rho Q$$

- $\phi$  - porosité du milieu  $\phi = \frac{\text{Volume du vide}}{\text{Volume total}}$
- $\rho$  - densité du fluide
- $\mathbf{V}$  - vitesse de l'écoulement
- $Q$  - terme source

- Loi de Darcy - relation entre la vitesse  $V$  et la pression  $p$

$$V = -\frac{1}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z)$$

- $\mu$  - viscosité du fluide
- $\rho$  - densité du fluide
- $g$  - la gravité

## 2. Écoulements diphasiques

- Deux fluides non miscibles sont présents dans le milieu (eau-air)
- La saturation  $S_\alpha$  décrit localement la proportion du fluide  $\alpha$ ,

$$S_\alpha = \frac{\text{Volume occupé par le fluide } \alpha}{\text{Volume total}}$$

- $\tilde{\rho}_\alpha$  masse volumique du fluide  $\alpha$

- Loi de conservation de la masse

$$\frac{\partial(\phi \tilde{\rho}_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}(\tilde{\rho}_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = \tilde{\rho}_\alpha \mathbf{Q}_\alpha$$

- Loi de Darcy généralisée

$$\mathbf{V}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}(\nabla p_\alpha + \tilde{\rho}_\alpha \mathbf{g} \nabla z)$$

- $k_{r\alpha}$  perméabilité relative de la phase  $\alpha$
- Les perméabilités relatives dépendent des saturations  $S_\alpha$  :  
 $k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(S_\alpha)$
- On a  $k_{r\alpha}(0) = 0$  et  $k_{r\alpha}(1) = 1$ .

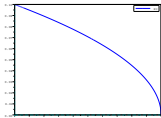
⇒ 2 équations à 4 inconnues  $S_a, S_w, p_a, p_w$ .

- Les fluides sont considérés comme homogènes et incompressibles, ce qui implique que les masses volumiques  $\tilde{\rho}_w$  et  $\tilde{\rho}_a$  sont constantes.

- $$S_\alpha = \frac{\text{Volume occupé par le fluide } \alpha}{\text{Volume totale}} \Rightarrow S_a + S_w = 1$$

- Les pressions des deux fluides  $p_a$  et  $p_w$  sont liées par la pression capillaire

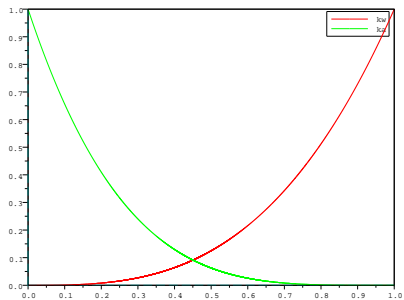
$$p_a = p_w + p_c(S_w)$$



- On pose  $S_w = u$
- On substitue
  - ★  $S_a = 1 - u$
  - ★  $p_a = p_w + p_c(u)$
  - ★  $k_{rw}(S_w) = k_w(u)$  et  $k_{ra}(S_a) = k_{ra}(1 - u) = k_a(u)$
  - ★  $\mu = \frac{\mu_a}{\mu_w}$

⇒ 2 équations à 2 inconnues  $u, p$ .

- Allures des perméabilités relatives  $k_a$   $k_w$



- On obtient le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \left[ k_w(u) (\nabla p + g \nabla z) \right] = Q_1$$

$$\frac{\partial(1-u)}{\partial t} - \operatorname{div} \left[ \frac{k_a(u)}{\mu} \left( \nabla(p + p_c(u)) + g \nabla z \right) \right] = Q_2$$

## Le Problème étudié

- Sans gravité

## Hypothèses

$(H_1)$   $\Omega$ , un domaine régulier borné de  $\mathbb{R}^N$ ,

$(H_2)$   $T > 0$  est donné,

$$\left. \begin{aligned}
 & u_t - \operatorname{div}(k_w(u)\nabla p) = f_\mu(c)\bar{s} - f_\mu(u)\underline{s} && \text{dans } \Omega \times (0, T) && (1) \\
 & (1 - u)_t - \operatorname{div}\left(\frac{k_a(u)}{\mu}\nabla(p + p_c(u))\right) \\
 & \quad = (1 - f_\mu(c))\bar{s} - (1 - f_\mu(u))\underline{s} && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 & \nabla p \cdot n = 0 && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\
 & \nabla(p + p_c(u)) \cdot n = 0 && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\
 & \int_{\Omega} p(x, t) dx = 0 && \text{dans } (0, T) \\
 & u(x, 0) = u_0(x) && \text{dans } \Omega
 \end{aligned} \right\} (P^\mu)$$

avec  $f_\mu(s) = \frac{k_w(s)}{k_w(s) + \frac{k_a(s)}{\mu}}$ .

## Hypothèses

$$(H_3) \quad u_m \in (0, 1),$$

$$(H_4) \quad u_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ et } u_m \leq u_0 \leq 1 \text{ p.p dans } \Omega,$$

$$(H_5) \quad \bar{s} \in L^2(\Omega \times (0, T)), \quad \bar{s} \geq 0, \quad \underline{s} \in L^2(\Omega \times (0, T)), \\ \underline{s} \geq 0 \text{ et } \int_{\Omega} (\bar{s}(x) - \underline{s}(x)) dx = 0,$$

## Hypothèses

$$(H_6) \quad k_w \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), \quad k'_w \geq 0, \\ k_w(0) = 0, \quad k_w(1) = 1 \text{ et } k_w(u_m) > 0,$$

$$(H_7) \quad k_a \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), \quad k'_a \leq 0, \\ k_a(1) = 0, \quad k_a(0) = 1 \text{ et } k_a(s) > 0 \quad \forall s \in [0, 1),$$

$$(H_8) \quad p_c \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \cup C^1([0, 1], \mathbb{R}), \quad p'_c < 0 \\ \text{et } \sup_{s \in [0, 1)} (-k_a(s)p'_c(s)) < +\infty,$$

## Résultats formels quand $\mu \downarrow 0$

$$u^\mu \rightarrow u$$

$$p^\mu \rightarrow p$$

$$f_\mu(s) \rightarrow \chi(s) := \begin{cases} 0 & \text{si } s \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

(1) quand  $\mu \downarrow 0$  donne

$$u_t - \operatorname{div}(k_w(u)\nabla p) = \chi(c)\bar{s} - \hat{f}\underline{s}$$

avec  $\hat{f} = \lim_{\mu \downarrow 0}(f_\mu(u^\mu))$  tq  $0 \leq \hat{f} \leq 1$ .

(2) quand  $\mu \downarrow 0$  donne

$$k_a(u) = 0 \text{ ou } \nabla(p + p_c(u)) = 0$$

c'est à dire

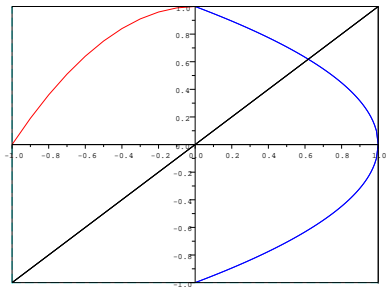
$$\underline{u(x, t) = 1 \text{ ou } p + p_c(u) = Cste(t)}$$

Formellement,  $u$  satisfait le probleme limite suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \operatorname{div} \left( k_w(u) \nabla p \right) + \chi(c) \bar{s} - \hat{f}_{\underline{s}} & \text{dans } Q_T \\ \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

## Formulation de la forme de l'équation de Richards :

$$\beta(s) := (-p_c)^{-1}(s) \text{ pour } s < 1$$



Pour  $u < 1$  on pose

$$v := -p_c(u) \Leftrightarrow u = (-p_c)^{-1}(v) = \beta(v)$$

et

$$\nabla p = -\nabla p_c(u) = \nabla v$$

$\Rightarrow v$  est solution faible de

$$\begin{cases} \beta(v)_t = \operatorname{div} \left( k_w(\beta(v)) \nabla v \right) + \chi(c) \bar{s} - \hat{f}_s & \text{dans } Q_T \\ \nabla \beta(v) \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \beta(v)(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

## Résultats rigoureux

**Théorème** Il existe  $(u, p, \hat{f})$  et une sous suite  $((u^{\mu_n}, p^{\mu_n}))_{n \in N}$  de solution faible du Problème  $(P^{\mu_n})$  tq

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(Q_T), \quad 0 \leq u \leq 1, \\ \hat{f} &\in L^\infty(Q_T), \quad 0 \leq \hat{f} \leq 1, \\ p &\in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \end{aligned}$$

et quand  $\mu_n \downarrow 0$

$$\begin{aligned} (u^{\mu_n})_{n \in N} &\text{ tend vers } u \text{ fortement dans } L^2(Q_T), \\ (p^{\mu_n})_{n \in N} &\text{ tend vers } p \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

$(u, p)$  satisfait

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \varphi_t dx dt - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = \int_0^T \int_{\Omega} k_w(u) \nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \left( \chi(c) \bar{s} - \hat{f}_{\underline{s}} \right) \varphi dx dt \quad (1)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{C}$  avec  $\hat{f}$  limite faible \* de  $f_{\mu}(u^{\mu})$ . De plus on a

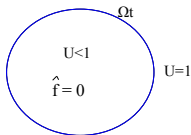
$$\int_0^T \int_{\Omega} k_a(u) \left[ \nabla p + \nabla p_c(u) \right]^2 dx dt = 0 \quad (2)$$

et

$$\int_{\Omega} p(x, t) dx = 0 \text{ pour presque tout } t \in (0, T). \quad (3)$$

**Remarque  $\hat{f}$  n'est pas complètement déterminée**

**Corollaire** On suppose que  $u < 1$  dans un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $Q_T$  et que  $u = 1$  dans  $Q_T \setminus \mathcal{O}$



alors pour tout  $t \in [0, T]$

$$p(x, t) = -p_c(u(x, t)) + \text{constante}(t), \text{ pour tout } x \in \Omega_t$$

et  $u$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = -\operatorname{div} \left( k_w(u) \nabla p_c(u) \right) + \chi(c) \bar{s} & \text{dans } \mathcal{O} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \cap \partial \Omega \times [0, T] \\ u = 1 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \\ u(x, 0) = u_0(x) & \end{array} \right.$$

## Plan de la preuve

- ▶ Régularisation du Problème  $P_\delta^\mu$

## Plan de la preuve

- ▶ Régularisation du Problème  $P_\delta^\mu$
- ▶ Existence de Solutions régulières

## Plan de la preuve

- ▶ Régularisation du Problème  $P_\delta^\mu$
- ▶ Existence de Solutions régulières
- ▶ Estimations à priori en continu

## Plan de la preuve

- ▶ Régularisation du Problème  $P_\delta^\mu$
- ▶ Existence de Solutions régulières
- ▶ Estimations à priori en continu
- ▶ Passage à la limite quand  $\delta$  tend vers 0 puis quand  $\mu$  tend vers 0

On définit

$$g(s) = \int_0^s k_a(\tau) p'_c(\tau) d\tau, \quad \forall s \in [0, 1],$$

- $g$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$  lipschitzienne de rapport  $L_g$ .

$$(P_\delta^\mu) \left\{ \begin{array}{l}
 u_t - \operatorname{div}(k_w(u)\nabla p) = f_\mu(c)\bar{s}_\delta - f_\mu(u) \left( \underline{s}_\delta + \int (\underline{s}_\delta - \bar{s}_\delta) dx \right) \\
 (1-u)_t - \operatorname{div}\left(\frac{k_a(u)}{\mu} \nabla(p + p_c(u))\right) = (1 - f_\mu(c))\bar{s} \\
 -(1 - f_\mu(u)) \left( \underline{s}_\delta + \int (\underline{s}_\delta - \bar{s}_\delta) dx \right) \\
 \nabla p \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\
 \nabla(p + p_c(u)) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\
 \int_\Omega p(x, t) dx = 0 \quad \text{dans } (0, T) \\
 u(x, 0) = u_0^\delta(x) \quad \text{dans } \Omega
 \end{array} \right.$$

$u_0^\delta$ ,  $c_\delta$ ,  $\bar{s}_\delta$  et  $\underline{s}_\delta$  tendent  $u_0$ ,  $c$ ,  $\bar{s}$  et  $\underline{s}$  dans  $L^2$  quand  $\delta \downarrow 0$ .

Théorème : Il existe  $(u_\delta^\mu, p_\delta^\mu)$  solution régulière de  $(P_\delta^\mu)$  et

$$u_m \leq u_\delta^\mu(x, t) \leq 1, \text{ for all } (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

*Preuve* : basée sur un théorème de point fixe

**Corollaire** Pour tout  $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$

$$0 = f_\mu(0) \leq f_\mu(u_\delta^\mu(x, t)) \leq 1 = f_\mu(1)$$

$$0 \leq k_w(u_\delta^\mu(x, t)), k_a(u_\delta^\mu(x, t)) \leq 1,$$

$$0 < \alpha \leq k_w(u_\delta^\mu(x, t)) + \frac{1}{\mu} k_a(u_\delta^\mu(x, t))$$

$p_c(u_\delta^\mu(x, t))$  borné.

## Lemme : Estimations à priori

$$\int_0^T \int_{\Omega} k_a(u_{\delta}^{\mu})(x, t) (\nabla p_{\delta}^{\mu} + \nabla p_c(u_{\delta}^{\mu}))^2(x, t) dx dt \leq C\mu,$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla p_{\delta}^{\mu}|^2(x, t) dx dt \leq C$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla g(u_{\delta}^{\mu})|^2(x, t) dx dt \leq C.$$

Remarque Estimations indépendantes de  $\delta$

### Corollaire : Translation en espace de $g(u_\delta^\mu)$

$$\int_0^T \int_{\Omega_r} (g(u_\delta^\mu(x + \xi, t)) - g(u_\delta^\mu)(x, t))^2(x, t) dx dt \leq C\xi^2,$$

avec  $\xi \in \mathbb{R}^N$  et  $\|\xi\| \leq 2r$ .

### Lemme : Translation en temps de $g(u_\delta^\mu)$

$$\int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} [g(u_\delta^\mu(x, t + \tau)) - g(u_\delta^\mu)(x, t)]^2(x, t) dx dt \leq C\tau,$$

pour tout  $\tau \in (0, T)$ .

**Lemme : Solution faible de  $(P^\mu)$**  Sous les hypothèses  $(H_1) - (H_9)$  il existe une solution faible  $(u^\mu, p^\mu)$  du Problème  $(P^\mu)$  satisfaisant

$$u_m \leq u^\mu(x, t) \leq 1, \text{ for all } (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

et

$$\int_0^T \int_\Omega k_a(u^\mu)(x, t) (\nabla p^\mu + \nabla p_c(u^\mu))^2(x, t) dx dt \leq C\mu,$$

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla p^\mu|^2(x, t) dx dt \leq C$$

et

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla g(u^\mu)|^2(x, t) dx dt \leq C.$$

## Preuve du Théorème de convergence :

• Estimations à priori du Lemme précédent sur  $(u^\mu, p^\mu)$

• Translation en espace  $g(u^\mu)$

$$\int_0^T \int_{\Omega_r} (g(u^\mu(x + \xi, t)) - g(u^\mu)(x, t))^2(x, t) dx dt \leq C\xi^2,$$

avec  $\xi \in \mathbb{R}^N$  et  $\|\xi\| \leq 2r$ .

• Translation en temps de  $g(u^\mu)$

$$\int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} [g(u^\mu(x, t+\tau)) - g(u^\mu(x, t))]^2(x, t) dx dt \leq C\tau, \quad \forall \tau \in (0, T).$$

$\Rightarrow$  la convergence quand  $\mu \downarrow 0$

**Passage à la limite** Il existe une sous suite  $(\mu_n)$  tel que  
lorsque  $\mu_n \downarrow 0$

$$(g(u^{\mu_n}))_{n \in N} \rightarrow \tilde{g} \quad \text{dans } L^2(\Omega \times (0, T))$$

$$\Rightarrow (u^{\mu_n})_{n \in N} \rightarrow g^{-1}(\tilde{g}) =: u \quad \text{dans } L^2(\Omega \times (0, T))$$

$$(p^{\mu_n})_{n \in N} \rightharpoonup p \quad \text{dans } L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

$$(f_\mu(u^{\mu_n}))_{n \in N} \rightharpoonup^* \hat{f} \quad \text{dans } L^\infty(\Omega \times (0, T))$$

$$\chi \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \{0, 1\} \\ s & \mapsto \chi(s) = 0 \text{ si } s \neq 1 \text{ et } \chi(1) = 1 \end{cases}$$

$$\int_{Q_T} [u^\mu \phi_t - k_w(u^\mu) \nabla p^\mu \cdot \nabla \phi] dx dt + \int_{Q_T} (f_\mu(c) \bar{s} - f_\mu(u^\mu) \underline{s}) \phi dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0,$$

quand  $\mu \downarrow 0$

$$\int_{Q_T} [u \phi_t - k_w(u) \nabla p \cdot \nabla \phi] dx dt + \int_{Q_T} (\chi(c) \bar{s} - \hat{f} \underline{s}) \phi dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0,$$

pour tout  $\phi \in C^\infty(\Omega \times (0, T))$  telle que  $\phi(\cdot, T) = 0$ .

De plus de

$$\int_0^T \int_{\Omega} k_a(u^\mu)(x, t) (\nabla p^\mu + \nabla p_c(u^\mu))^2(x, t) dx dt \leq C\mu,$$

on déduit quand  $\mu \downarrow 0$

$$\int_{Q_T} k_a(u) [\nabla p + \nabla p_c(u)]^2 dx dt = 0.$$

## Simulations numériques en dimension 1

$$u_t = \partial_x \left( k_w(u) \partial_x p \right) + f_\mu(c) \bar{s} - f_\mu(u) \underline{s} \quad (4)$$

$$(1 - u)_t = \partial_x \left( \frac{1}{\mu} k_a(u) \partial_x (p + p_c(u)) \right) + (1 - f_\mu(c)) \bar{s} - (1 - f_\mu(u)) \underline{s}$$

En sommant :

$$\partial_x p = - \frac{k_a(u)}{k_a(u) + \mu k_w(u)} \partial_x (p_c(u)). \quad (5)$$

Ce qui dans (4) donne

$$u_t = -\partial_x \left[ \frac{k_w(u) k_a(u)}{k_a(u) + \mu k_w(u)} \partial_x (p_c(u)) \right] + f_\mu(c) \bar{s} - f_\mu(u) \underline{s}. \quad (6)$$

Et de (5) on déduit

$$p(x, t) = -\mathcal{R}(u)(x, t) + \int_0^1 \mathcal{R}(u)(y, t) dy$$

Soit  $N$  et  $K$  deux entiers.  $(t^n)_{n \in [0, N+1]}$  subdivision de  $[0, T]$  de pas  $\frac{T}{N+1}$  et  $(x^k)_{k \in [0, K+1]}$  subdivision de  $[0, 1]$  de pas  $\frac{1}{K+1}$ .

$$u_t = -\partial_x \left[ \frac{k_w(u)k_a(u)}{k_a(u) + \mu k_w(u)} \partial_x(p_c(u)) \right] + f_\mu(c)\bar{s} - f_\mu(u)\underline{s}.$$

$$\begin{aligned} \frac{N+1}{T} \left( U_i^{n+1} - U_i^n \right) = & \\ & - \left( p_c(U_{i+1}^n) - p_c(U_i^n) \right) (L+1) \frac{k_w(U_{i+1}^n)k_a(U_i^n)}{\mu k_w(U_{i+1}^n) + k_a(U_i^n)} \\ & + \left( p_c(U_i^n) - p_c(U_{i-1}^n) \right) (L+1) \frac{k_w(U_i^n)k_a(U_{i-1}^n)}{\mu k_w(U_i^n) + k_a(U_{i-1}^n)} \\ & + f_\mu(C_i^n)\bar{S}_i^n - f_\mu(U_i^n)\underline{S}_i^n \end{aligned}$$

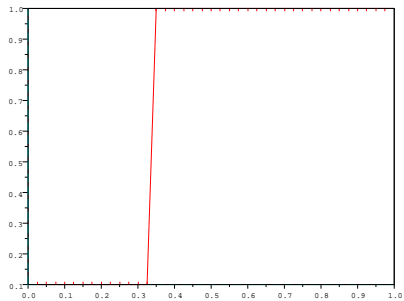
$$p(x, t) = -\mathcal{R}(u)(x, t) + \int_0^1 \mathcal{R}(u)(y, t) dy$$

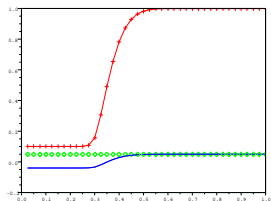
$$P_i^{n+1} = -\mathcal{R}(U_i^{n+1}) + \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \mathcal{R}(U_i^{n+1})$$

et

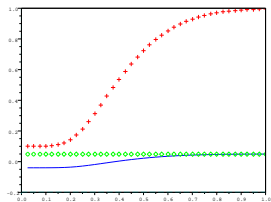
$$(P_g)_i^{n+1} = -\mathcal{R}(U_i^{n+1}) + \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \mathcal{R}(U_i^{n+1}) + p_c(U_i^{n+1})$$

Test 1: Injection en 0, Extraction en 1  
Condition initiale :

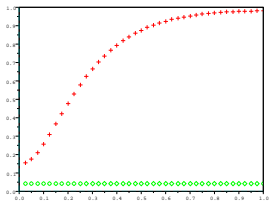




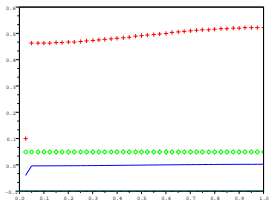
A  $t = 0,03$



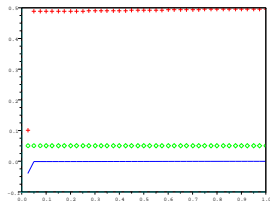
A  $t = 0,06$



A  $t = 0,5$

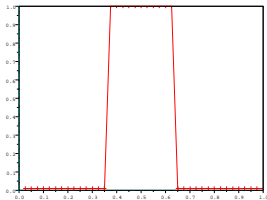


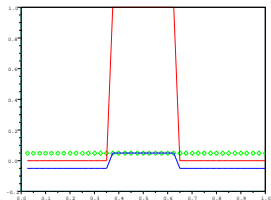
A  $t = 6$



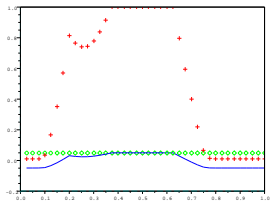
A  $t = 10$

Test 2: Injection en  $1/5$  extraction en  $4/5$  et Condition initiale :





A  $t = 0,5$



A  $t = 6$