

**Orsay, 20 janvier 2009**

**Formulation des modèles diphasiques  
modèles continus et approximation**

**par O. Angelini, C. Chavant, R. Eymard, S. Granet**

# Deux benchmarks diphasiques dans le cadre de MOMAS

Enjeu : formulation continue et  
approximation de problèmes diphasique

problème diphasique immiscible

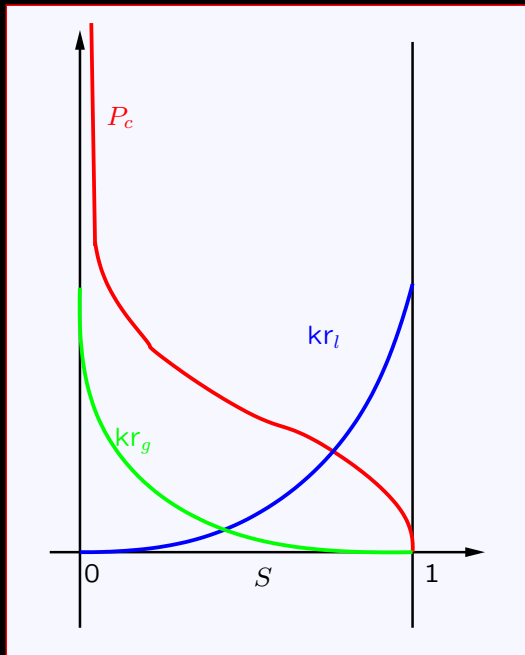
Benchmark BOBG, proposé par C. Chavant

problème diphasique miscible

Benchmark dissolution, proposé par F. Smaï

# Transport par capillarité, gaz compressible

Benchmark BOBG, proposé par C. Chavant



$$\partial_t(\Phi(x)S\rho_l) - \partial_x(\Lambda(x)\rho_l \frac{kr_l(x, S)}{\mu_l} \partial_x P_l) = 0$$

$$\partial_t(\Phi(x)(1 - S)\rho_g(P_g)) - \partial_x(\Lambda(x)\rho_g(P_g) \frac{kr_g(x, S)}{\mu_g} \partial_x P_g) = 0$$

$$P_g - P_l = P_c(x, S)$$

$$\rho_g(P_g) = C_g P_g$$

## Le problème BO-BG

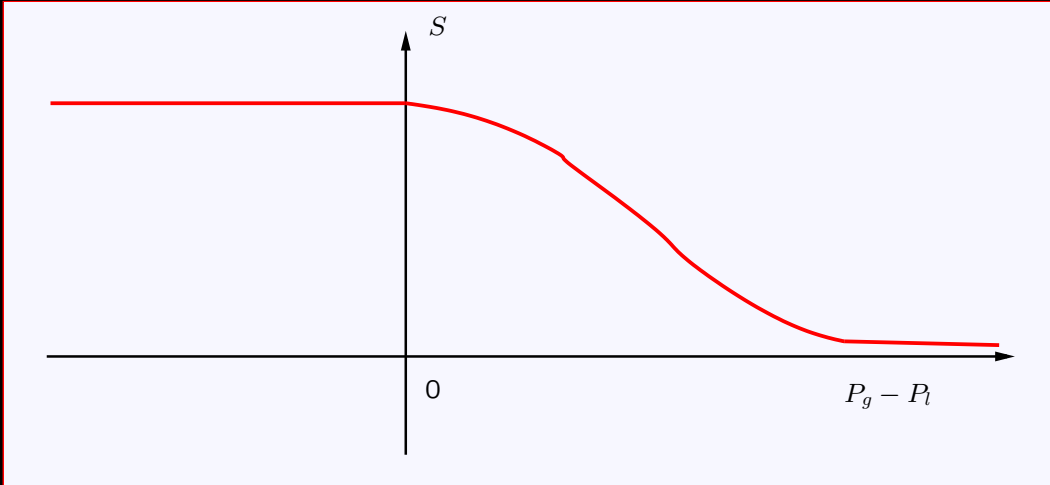
$S = 0.77$ BO	BG $S = 1$
$P_g = 10^5 \text{ Pa}$ et $P_l = P_g - P_c(S)$	$P_g = P_l = 10^5 \text{ Pa}$

Situation initiale

# Un premier comportement physique issu de ces équations

$P_g$  régulier, compris entre 0 et  $10^5$  Pa

$P_c \simeq 10^6$  à  $10^7$  Pa: en première approximation,  $S \simeq P_c^{-1}(x, -P_l)$  Richards !!!



$$\partial_t(\Phi(x)P_c^{-1}(x, -P_l)\rho_l) - \partial_x(\Lambda(x)\rho_l \frac{kr_l(x, P_c^{-1}(x, -P_l))}{\mu_l} \partial_x P_l) = 0$$

équation de type parabolique - dégénérant en elliptique

l'eau va de BG vers BO: question: l'air remplit-il le vide laissé par l'eau ?

## Un second comportement physique issu de ces équations

$$\partial_t(\Phi(x)(1 - S(x, t))C_g P_g) - \partial_x(\Lambda(x) \frac{\text{kr}_g(x, S(x, t)) C_g}{\mu_g} \partial_x(P_g^2)) = 0$$

équation du type “milieu poreux”

$$\partial_t u - \partial_{xx}^2 u^m = 0$$

avancement du point  $P_g = 0$  à vitesse finie  $\Rightarrow$  apparition du vide !

## Schéma numérique naturel

idée de départ : schéma de volumes finis, inspiré du pétrole

$$|K| \frac{A_{l,K}^{n+1} - A_{l,K}^n}{\delta t} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{l,K,\sigma}^{n+1} = 0$$

$$|K| \frac{A_{g,K}^{n+1} - A_{g,K}^n}{\delta t} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{g,K,\sigma}^{n+1} = 0$$

$$A_{l,K}^{n+1} = \Phi_K \rho_l S_K^{n+1} \quad A_{g,K}^{n+1} = \Phi_K C_g P_{g,K}^{n+1} (1 - S_K^{n+1})$$

$$P_{g,K}^{n+1} - P_{l,K}^{n+1} = P_{c,K}(S_K^{n+1})$$

$$F_{l,K,\sigma}^{n+1} = T_{K,\sigma} \rho_l \frac{\kappa_{l,\sigma}^{n+1}}{\mu_l} (P_{l,L}^{n+1} - P_{l,K}^{n+1})$$

$$F_{g,K,\sigma}^{n+1} = T_{K,\sigma} C_g \frac{P_{g,\sigma}^{n+1} \kappa_{g,\sigma}^{n+1}}{\mu_g} (P_{g,L}^{n+1} - P_{g,K}^{n+1})$$

Nécessite régularisation  $P_c$  en  $S = 1$  (dérivée infinie)

Impossible à calculer si on initialise  $S = 1$  dans BG  $\Rightarrow S = 1 - 10^{-n}$ ,  $n = 3, \dots, 6 \dots$

Doit-on garder le modèle continu de départ ?

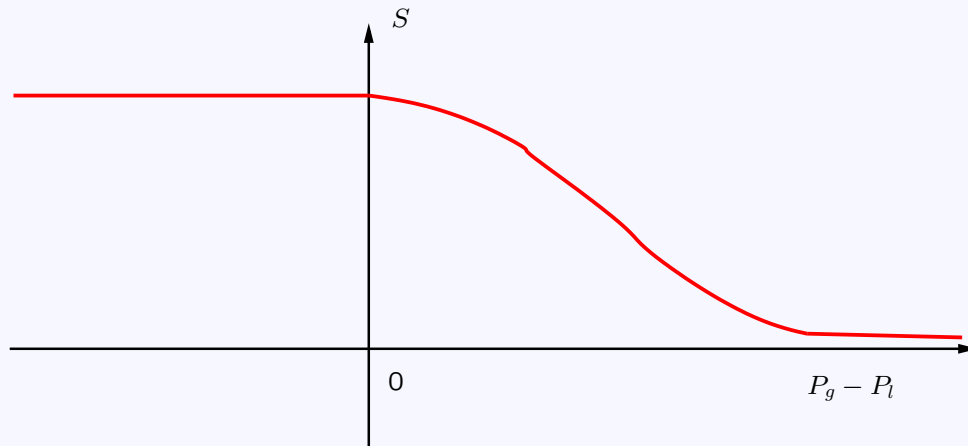
# Modèle continu approché

$$\partial_t(\Phi(x)S\rho_l) - \partial_x(\Lambda(x)\rho_l \frac{kr_l(x, S)}{\mu_l} \partial_x P_l) = 0$$

$$\rho_g(P_g) = C_g P_g$$

$$\partial_t(\Phi(x)(1 - S)\rho_g(P_g) + \Phi(x)SHP_g) - \partial_x(\Lambda(x)\rho_g(P_g) \frac{kr_g(x, S)}{\mu_g} \partial_x P_g) = 0$$

$$S = P_c^{-1}(x, P_g - P_l)$$



terme  $\Phi(x)SHP_g$

assimilable à concentration gaz  
valable si  $P_g \geq P_l$  et  $P_g \leq P_l$

Modèle de départ = limite  $H \rightarrow 0$  ?

## Schéma numérique pour le modèle approché

$$|K| \frac{A_{l,K}^{n+1} - A_{l,K}^n}{\delta t} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{l,K,\sigma}^{n+1} = 0$$

$$|K| \frac{A_{g,K}^{n+1} - A_{l,K}^n}{\delta t} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{g,K,\sigma}^{n+1} = 0$$

$$A_{l,K}^{n+1} = \Phi_K \rho_l S_K^{n+1} \quad A_{g,K}^{n+1} = \Phi_K (C_g P_{g,K}^{n+1} (1 - S_K^{n+1}) + S_K^{n+1} H P_{g,K}^{n+1})$$

$$S_K^{n+1} = P_{c,K}^{-1} (P_{g,K}^{n+1} - P_{l,K}^{n+1})$$

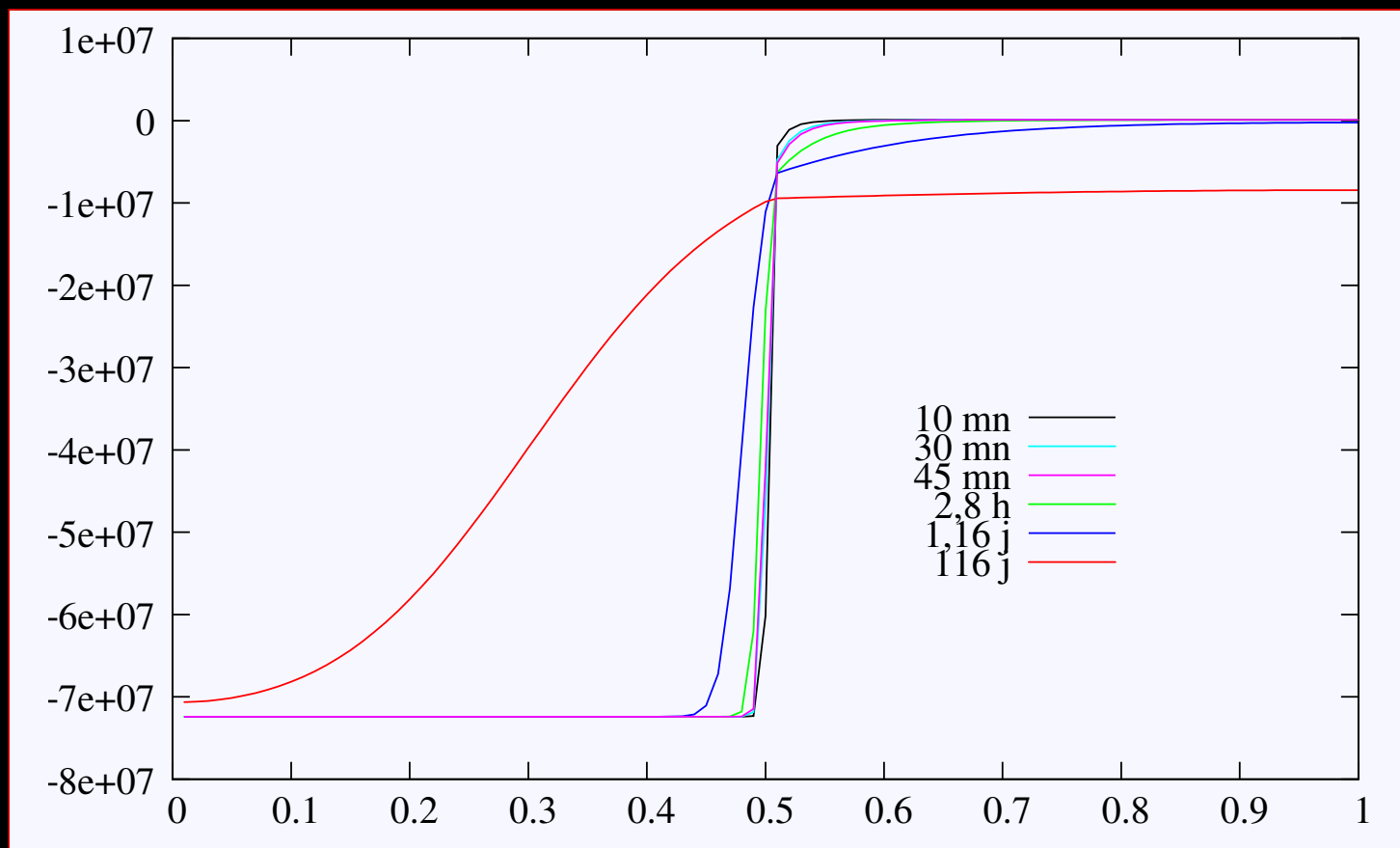
$$F_{l,K,\sigma}^{n+1} = T_{K,\sigma} \rho_l \frac{\kappa_{l,\sigma}^{n+1}}{\mu_l} (P_{l,L}^{n+1} - P_{l,K}^{n+1})$$

$$F_{g,K,\sigma}^{n+1} = T_{K,\sigma} C_g \frac{P_{g,\sigma}^{n+1} \kappa_{g,\sigma}^{n+1}}{\mu_g} (P_{g,L}^{n+1} - P_{g,K}^{n+1})$$

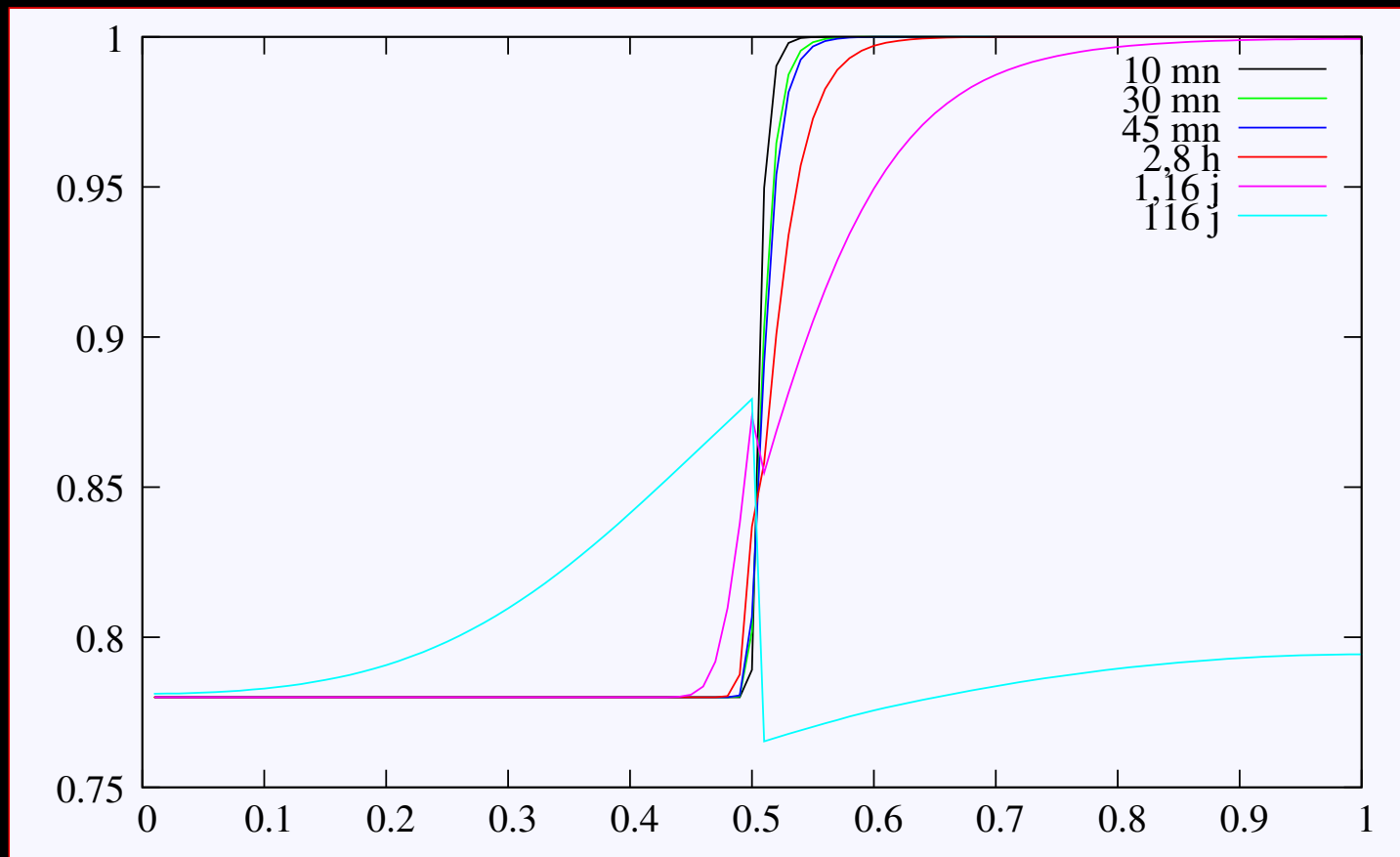
**Avantage : beaucoup plus de régularité**

**comportement numérique quand  $H \rightarrow 0$  semble sain : tests numériques pour  $H = 10^{-11}$**

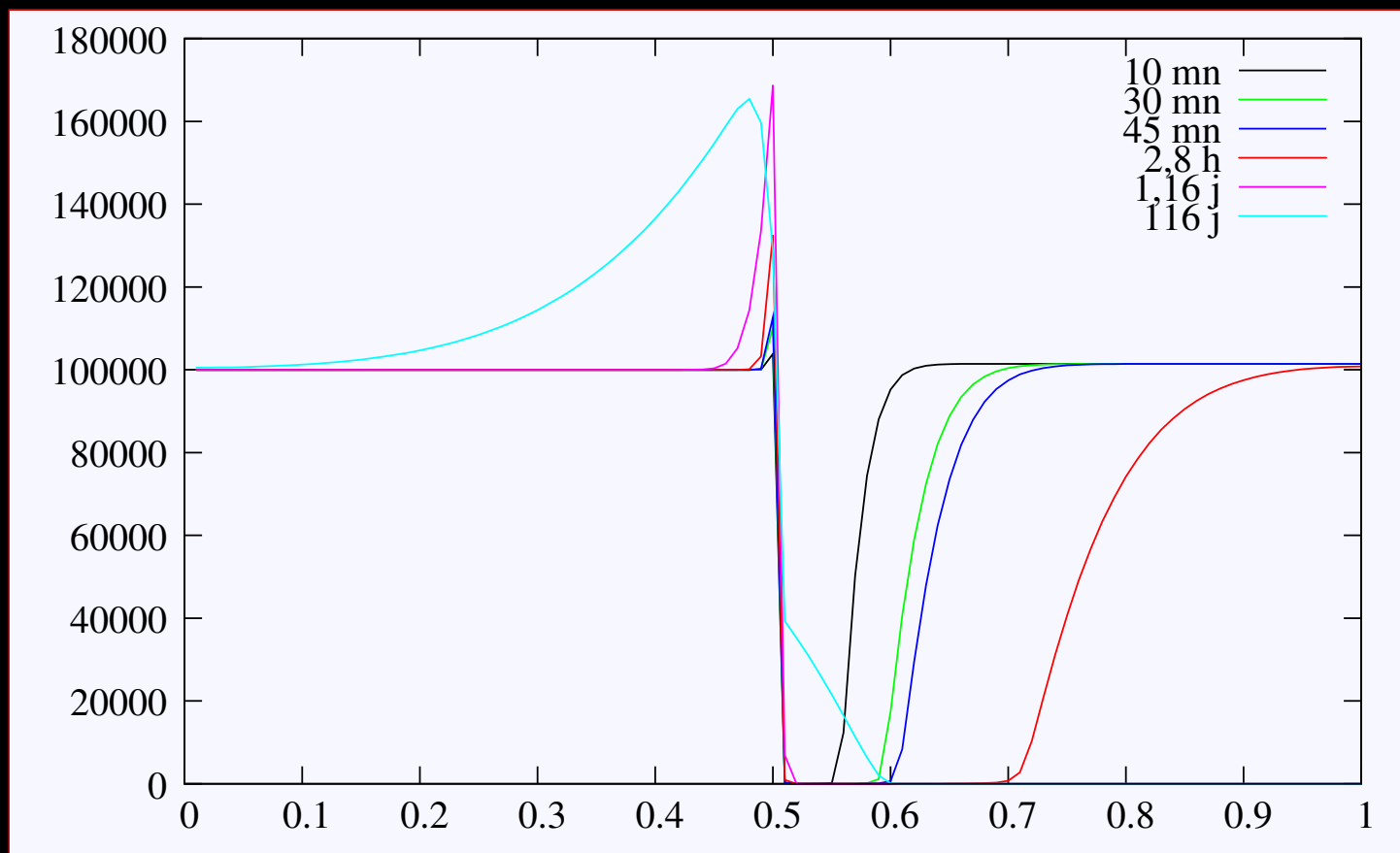
## Pression de l'eau à différents temps



## Saturation à différents temps

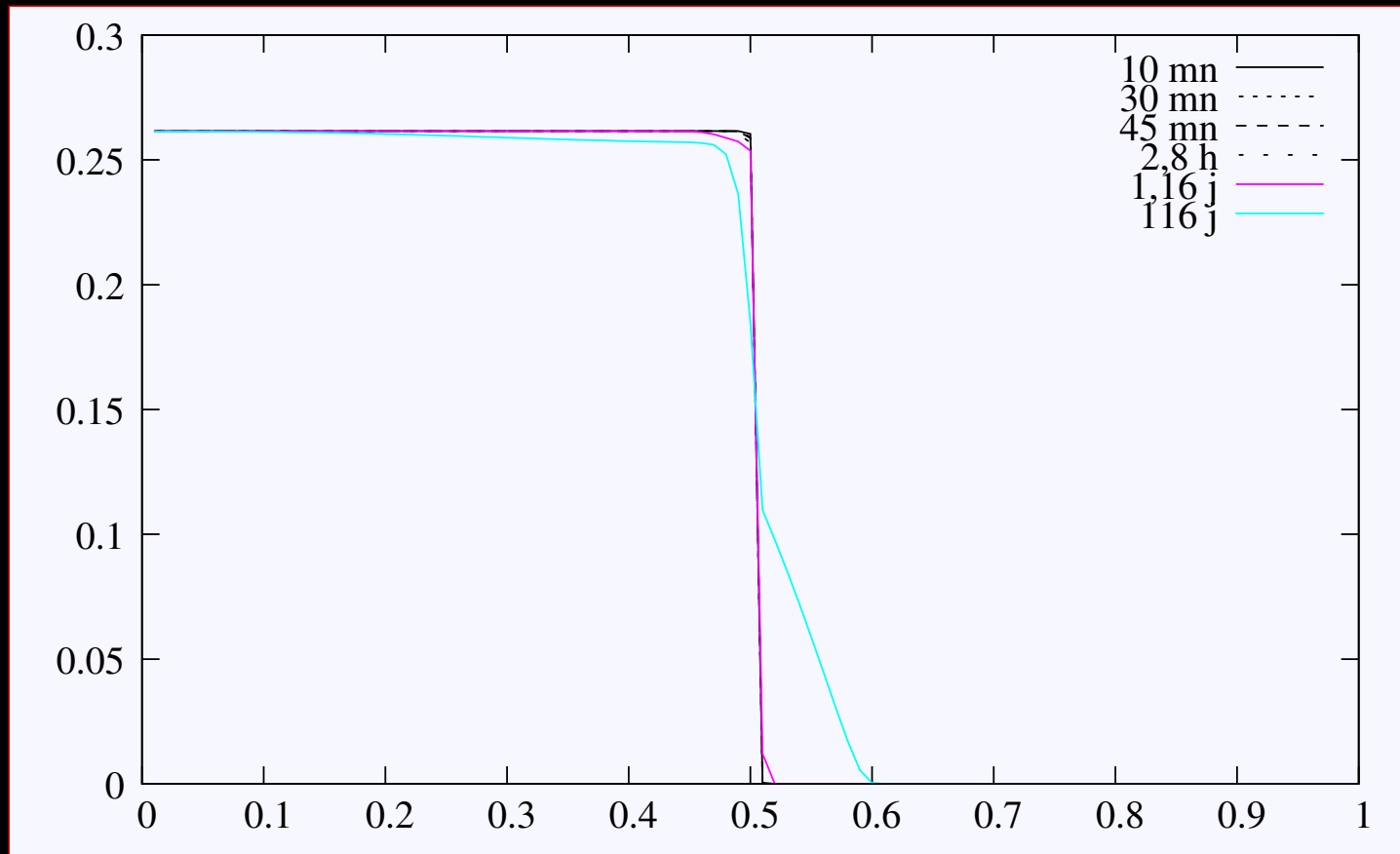


## Pression de l'air à différents temps



## Masse volumique de gaz à différents temps

$$C_g P_g (1 - S) + S H P_g$$



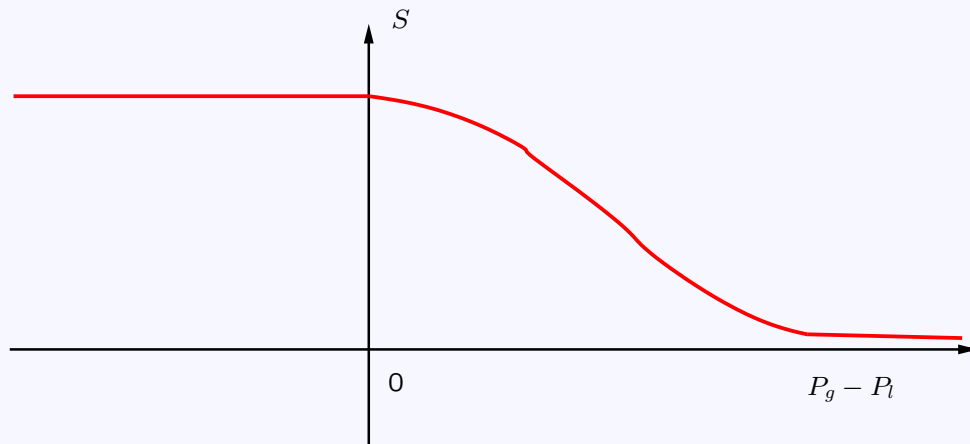
# Benchmark pour la diffusion-dissolution du gaz dans l'eau

Cas proposé par F. Smaï

$$\partial_t(\Phi S \rho_l) - \partial_x(\Lambda \rho_l \frac{kr_l(S)}{\mu_l} \partial_x P_l) = 0$$

$$S = P_c^{-1}(P_g - P_l)$$

$$\partial_t(\Phi(1 - S)\rho_g + \Phi S H P_g) - \partial_x(\Lambda \rho_g \frac{kr_g(S)}{\mu_g} \partial_x P_g + \Lambda H P_g \frac{kr_l(S)}{\mu_l} \partial_x P_l + D H S \partial_x P_g) = 0$$



## Conditions initiales et aux limites

Initialement : pas de gaz présent (ni dissous, ni libre)

Domaine  $[0, 200]$ , condition de débit de gaz imposé à gauche, débit d'eau nul

condition de pression d'eau imposée à droite

condition de pression de gaz nulle imposée à droite

durée  $10^5$  années

## Schéma numérique

$$|K| \frac{A_{l,K}^{n+1} - A_{l,K}^n}{\delta t} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{l,K,\sigma}^{n+1} = 0$$

$$|K| \frac{A_{g,K}^{n+1} - A_{l,K}^n}{\delta t} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{g,K,\sigma}^{n+1} = 0$$

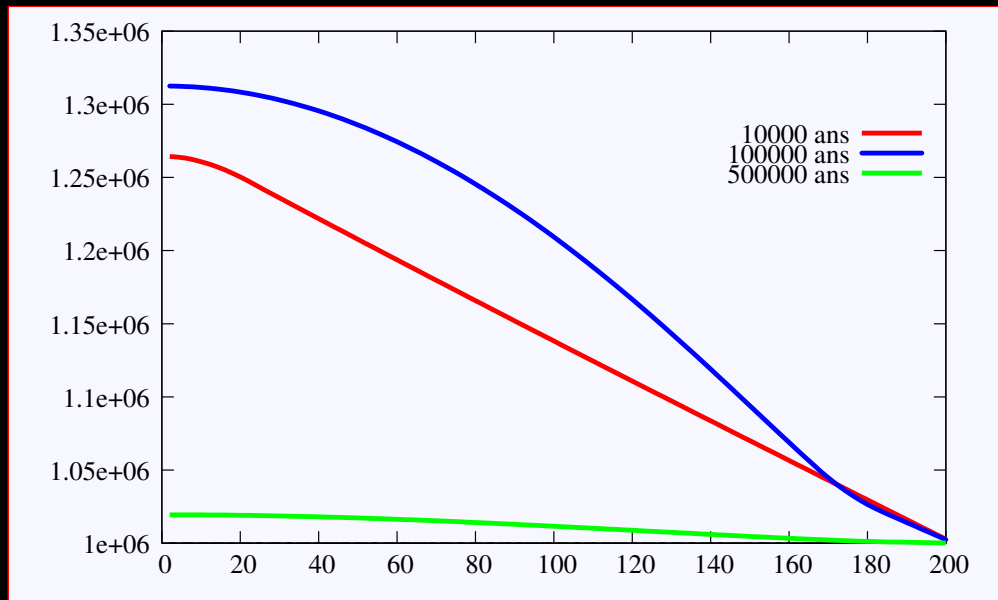
$$A_{l,K}^{n+1} = \Phi \rho_l S_K^{n+1} \quad A_{g,K}^{n+1} = \Phi (\rho_g (1 - S_K^{n+1}) + S_K^{n+1} H P_{g,K}^{n+1})$$

$$S_K^{n+1} = P_c^{-1} (P_{g,K}^{n+1} - P_{l,K}^{n+1})$$

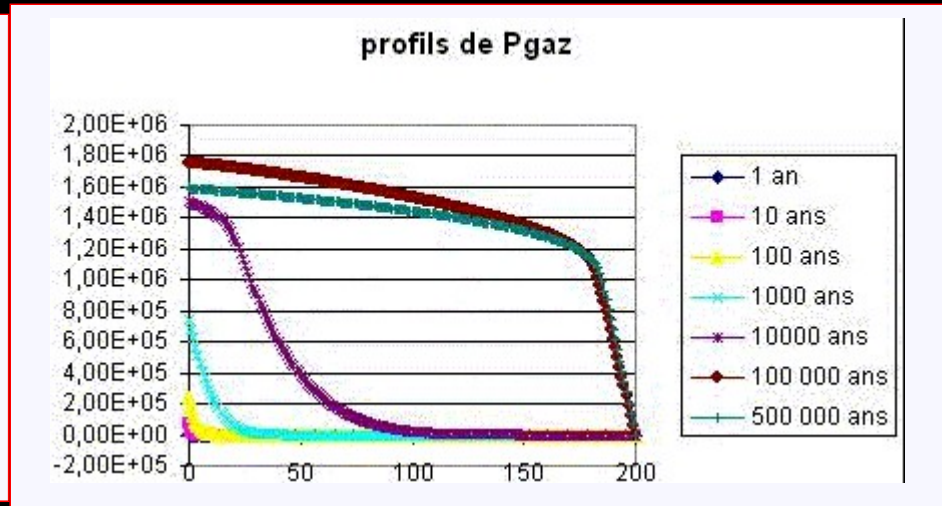
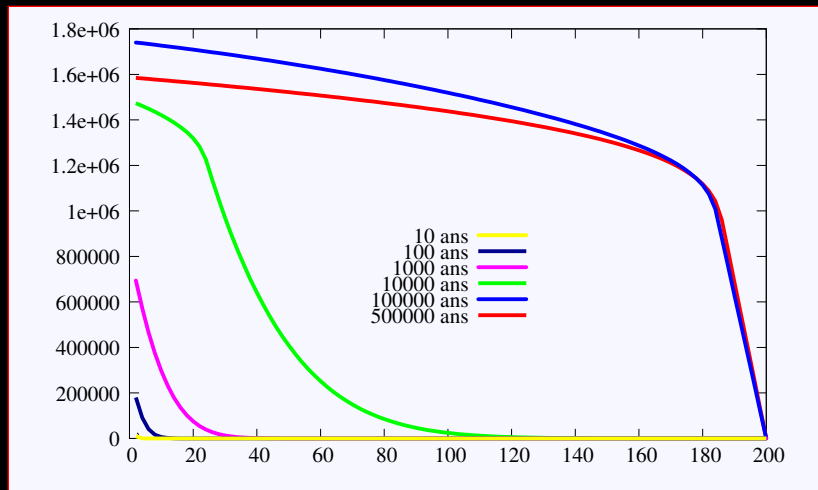
$$F_{l,K,\sigma}^{n+1} = T_{K,\sigma} \Lambda \rho_l \frac{kr_{l,\sigma}^{n+1}}{\mu_l} (P_{l,L}^{n+1} - P_{l,K}^{n+1})$$

$$\begin{aligned} F_{g,K,\sigma}^{n+1} &= T_{K,\sigma} \Lambda \rho_g \frac{kr_{g,\sigma}^{n+1}}{\mu_g} (P_{g,L}^{n+1} - P_{g,K}^{n+1}) \\ &+ T_{K,\sigma} \Lambda H \frac{P_{g,\sigma}^{n+1} kr_{l,\sigma}^{n+1}}{\mu_l} (P_{l,L}^{n+1} - P_{l,K}^{n+1}) \\ &+ T_{K,\sigma} DH \frac{S_K^{n+1} \mu_l}{2} + \frac{S_L^{n+1}}{2} (P_{g,L}^{n+1} - P_{g,K}^{n+1}) \end{aligned}$$

## Pression de l'eau à différents temps

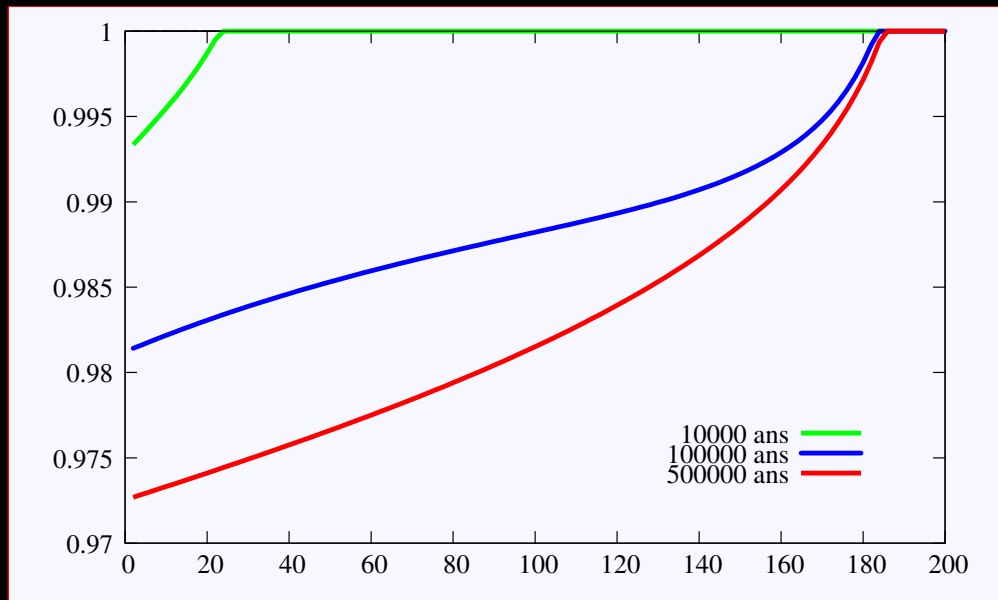


# Pression du gaz à différents temps

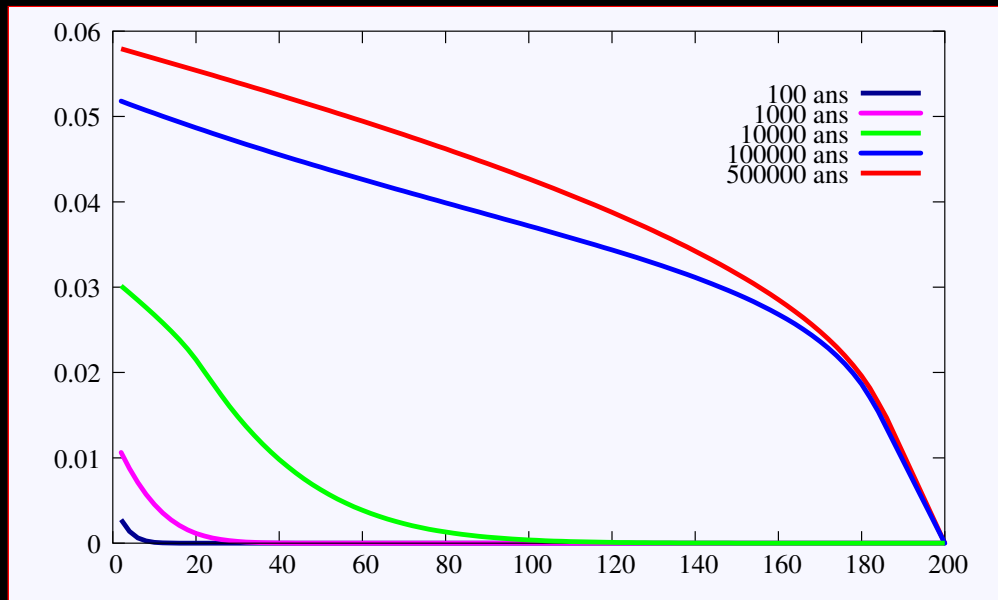


volumes finis standard (gauche), ASTER (droite)

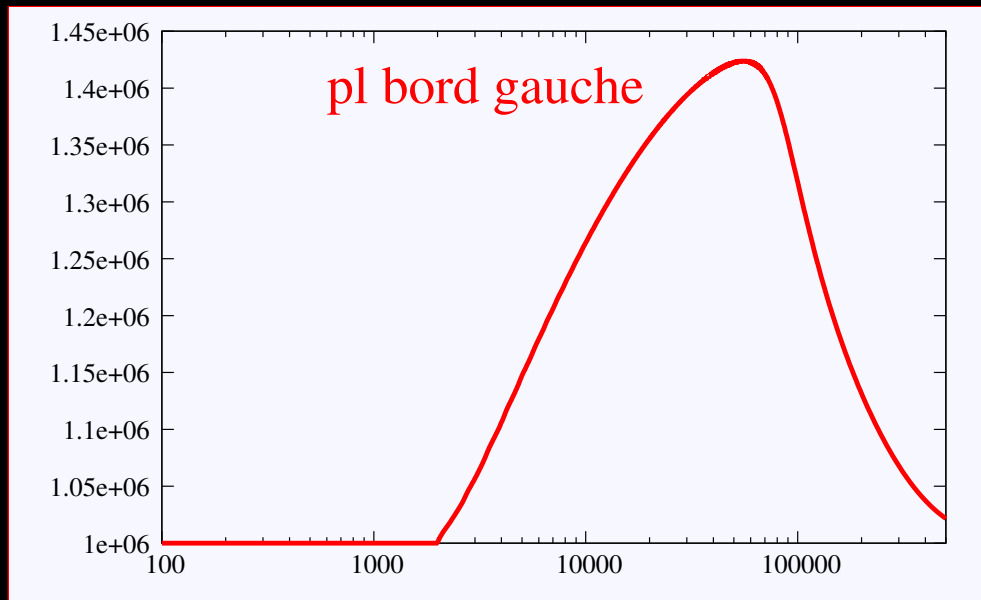
## Saturation d'eau à différents temps



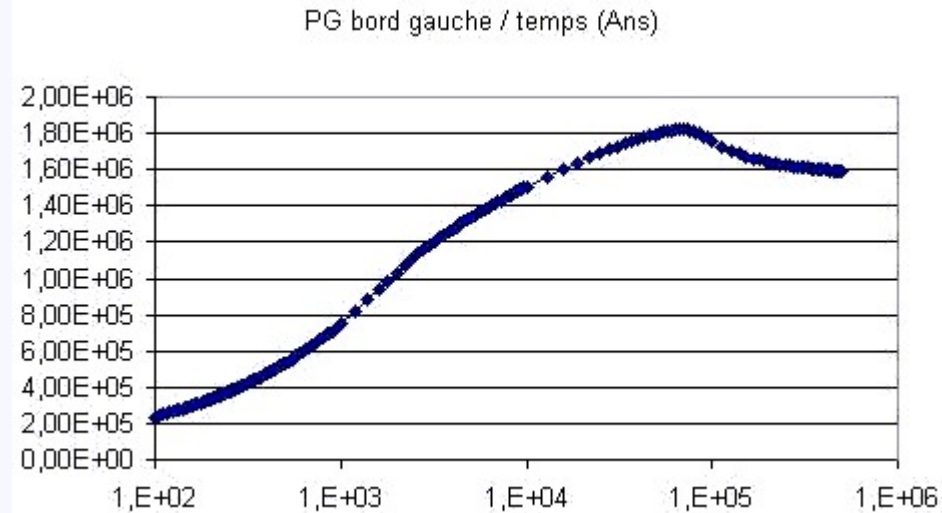
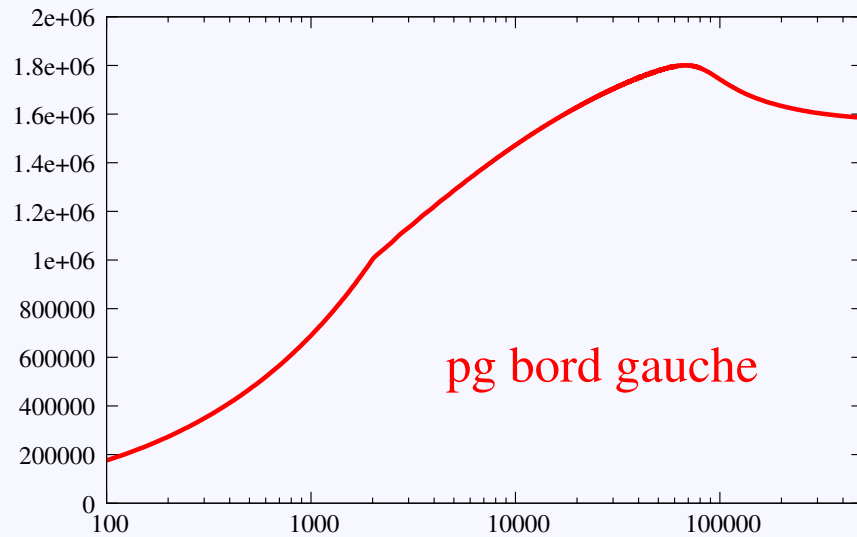
## Masse volumique du gaz à différents temps



## Evolution de la pression de l'eau sur le bord gauche

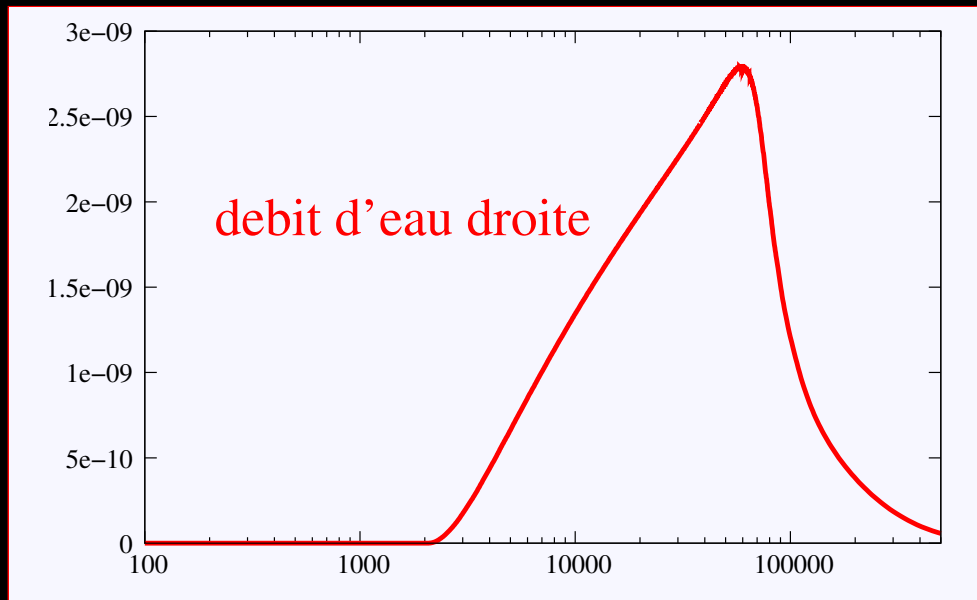


# Evolution de la pression du gaz sur le bord gauche

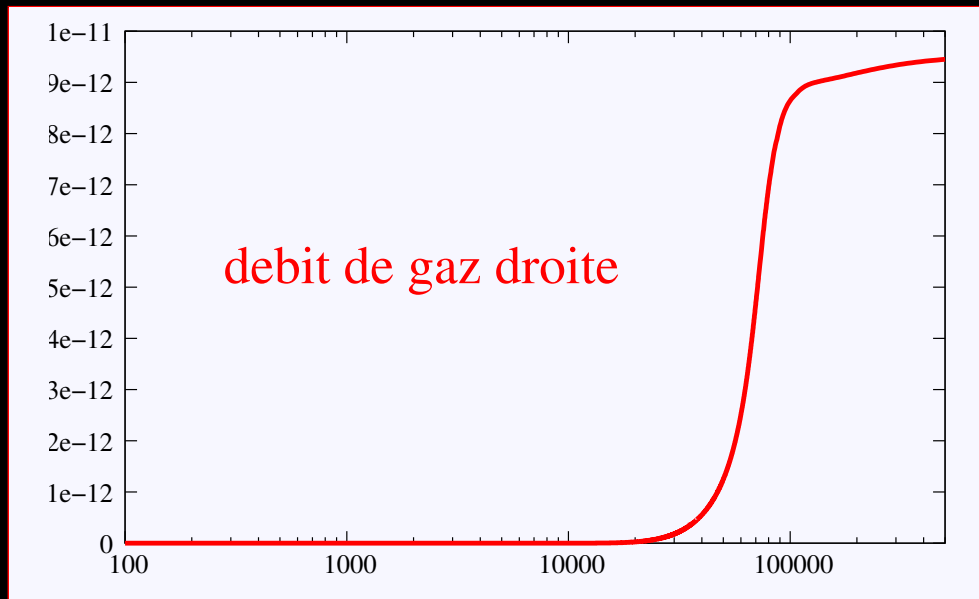


volumes finis standard (gauche), ASTER (droite)

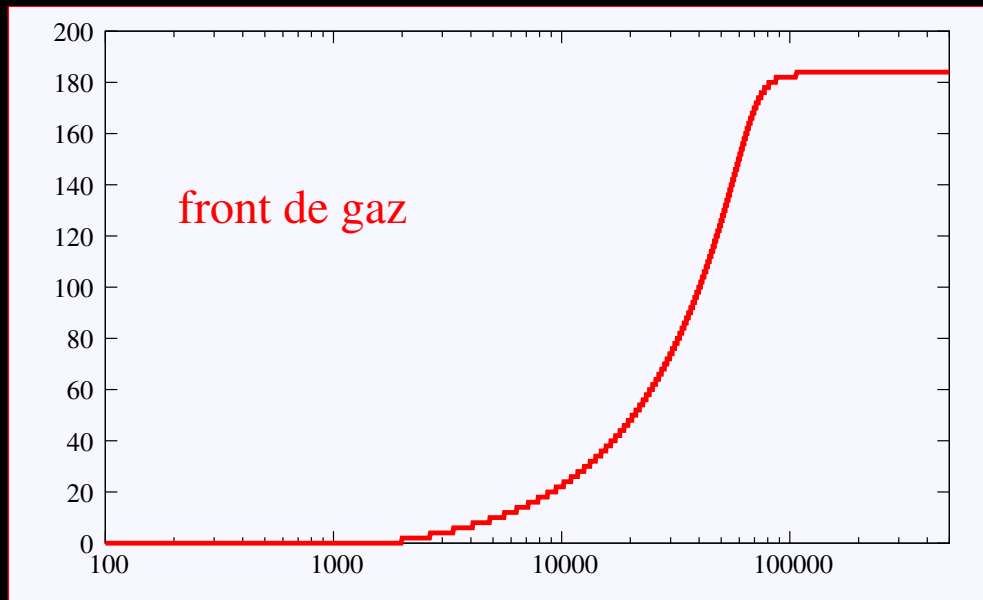
## Evolution du debit d'eau sur le bord droit



## Evolution du debit de gaz sur le bord droit



## Evolution du front de gaz



## Conclusions

Formulation avec dissolution adaptée aux problèmes à forte capillarité

Schéma de type “volumes finis” donne solution acceptable

Problèmes à étendre à maillages quelconques en 2D et 3D