

Les modèles d'endommagement à gradient et leur application à la rupture

J.-J. Marigo
H. Amor, C. Maurini

(Université Paris 6)

Modélisation de l'endommagement:

1. Insuffisance des modèles locaux
2. Modèles à gradient d'endommagement
3. Problème d'évolution et critère de sélection de solutions

Application à la rupture:

1. Régularisation de Griffith et prise en compte de la non interpénétration
2. Exemples:
 - Fissuration autour d'une inclusion rigide
 - Le Panthéon

Les modèles locaux

Variable (scalaire) d'endommagement: α

variable interne

Relation contrainte-déformation: $\sigma = E(\alpha)\varepsilon$

élasticité variable

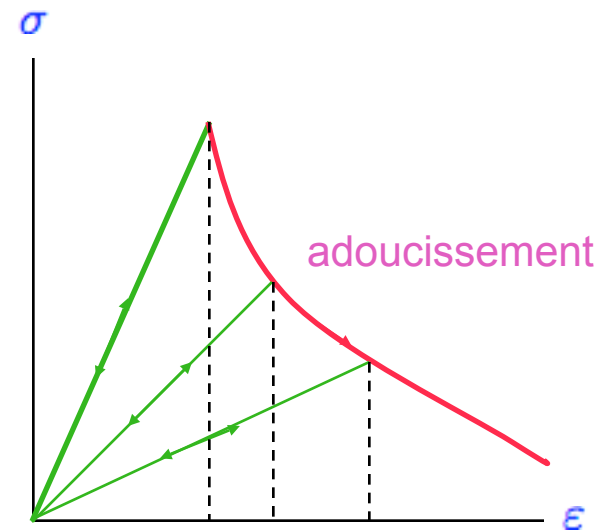
Loi d'évolution de l'endommagement

$$\dot{\alpha} \geq 0$$

irréversibilité

$$-\frac{1}{2}E'(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon \leq w'(\alpha) \quad \text{critère énergétique}$$

$$\left(\frac{1}{2}E'(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + w'(\alpha)\right) \dot{\alpha} = 0 \quad \text{bilan d'énergie}$$



Adoucissement et convexité

Travail de déformation $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}E(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + w(\boldsymbol{\alpha})$

Convexité de W par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$ à $\boldsymbol{\alpha}$ fixé

Convexité de W par rapport à $\boldsymbol{\alpha}$ à $\boldsymbol{\varepsilon}$ fixé

adoucissement

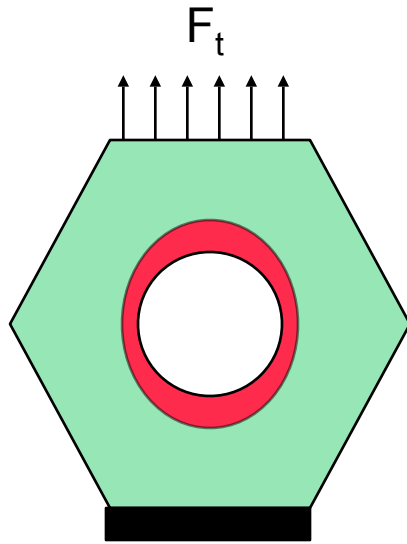


W non convexe par rapport à $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$



Bifurcations, Instabilités et Localisations

Le problème d'évolution



$u(x,t)?$
 $\alpha(x,t)?$

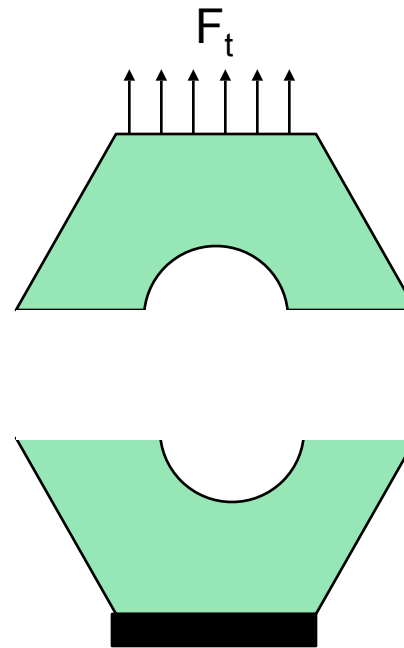
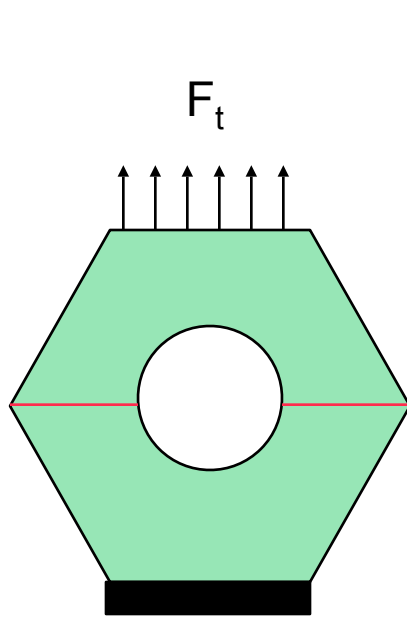
$$\mathcal{P}(u, \alpha) = \int_{\Omega} W(\varepsilon(u), \alpha) dx - f_t(u)$$

Problème variationnel

$$\mathcal{P}'(u, \alpha)(v - \dot{u}, \beta - \dot{\alpha}) \geq 0 \quad \forall v, \forall \beta \geq 0$$



Equilibre + Loi d'évolution



Adoucissement
+
Modèle local



- Rupture **sans** dépense d'énergie
- Infinité de solutions
- "Aucune" solution stable
- Dépendance au maillage

Les modèles non locaux

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = \frac{1}{2}E(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + w(\alpha) + \frac{1}{2}E_0\ell_0^2 \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha$$

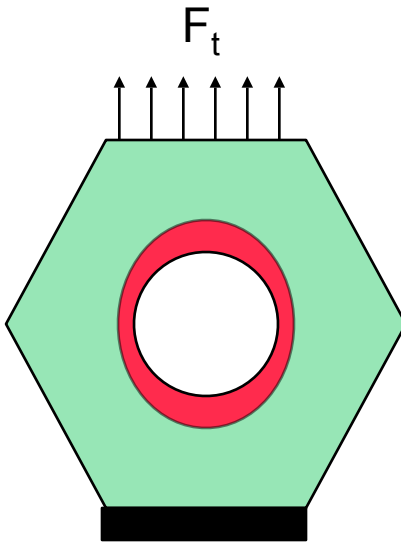
ℓ_0 longueur caractéristique du matériau

terme non local

$$\mathcal{P}_t(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{\Omega} W(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha, \nabla\alpha) dx - f_t(\mathbf{u})$$

Problème d'évolution

$$\mathcal{P}'_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t)(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_t, \beta - \dot{\alpha}_t) \geq 0, \quad \forall (\mathbf{v}, \beta), \quad \beta \geq 0$$



Infinité de solutions



Nécessité d'un critère de sélections

Stabilité et minimum d'énergie

Problème de minimisation incrémental

$$\min_u \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} E(\alpha) \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) + w(\alpha) + \frac{1}{2} E_0 \ell_0^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) dx - f_i(u)$$

$\alpha \geq \alpha_{i-1}$

- Remède partiel:
- Existence de réponses stables
 - Pas d'unicité
 - Minimisations alternées
 - Stabilité à vérifier numériquement

Application à la rupture

Energie originelle: u discontinu

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{u}) = \int_{\Omega \setminus S_u} \frac{1}{2} A \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \, dx - f_i(\mathbf{u}) + G_c \mathcal{H}^{n-1}(S_u)$$

Energie régularisée: u continu

Γ – convergence quand $\ell \rightarrow 0$

$$\mathcal{E}_i^\ell(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (1 - \alpha)^2 A \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \, dx - f_i(\mathbf{u}) + G_c \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha^2}{4\ell} + \ell \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) dx$$



- Eléments finis classiques
- Minimisations alternées quadratiques

La prise en compte
de la non interpénétration
et de l'asymétrie traction-compression

$$[[u]] \cdot n \geq 0 \quad \varepsilon = \frac{\text{Tr } \varepsilon}{N} I + \varepsilon^D$$

- Mode II pur (Lancioni-Royer) $[[u]] \cdot n = 0$

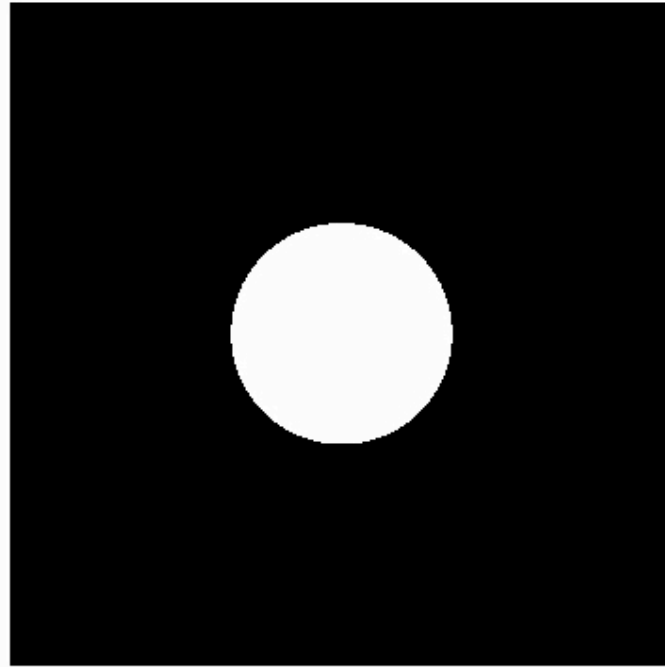
$$\frac{K}{2} (\text{div } u)^2 + (1 - \alpha)^2 \mu \varepsilon^D(u) \cdot \varepsilon^D(u)$$

non interpénétration, symétrie traction-compression

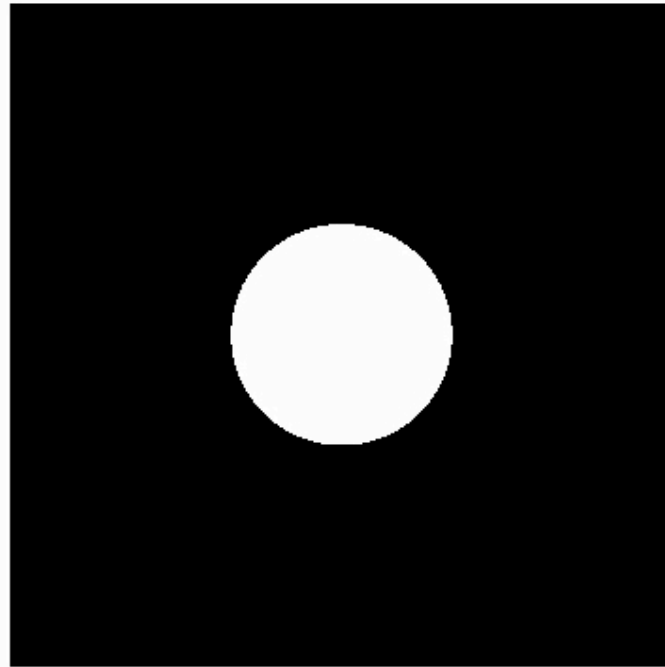
- Contact unilatéral $[[u]] \cdot n \geq 0$

$$\frac{K}{2} \left((\text{div } u)^- \right)^2 + (1 - \alpha)^2 \left(\frac{K}{2} \left((\text{div } u)^+ \right)^2 + \mu \varepsilon^D(u) \cdot \varepsilon^D(u) \right)$$

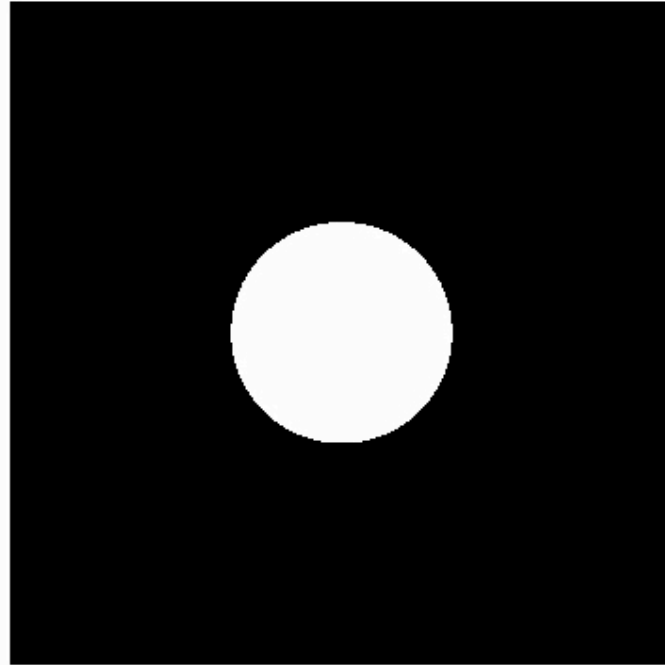
non interpénétration, asymétrie traction-compression
pb non linéaire en u



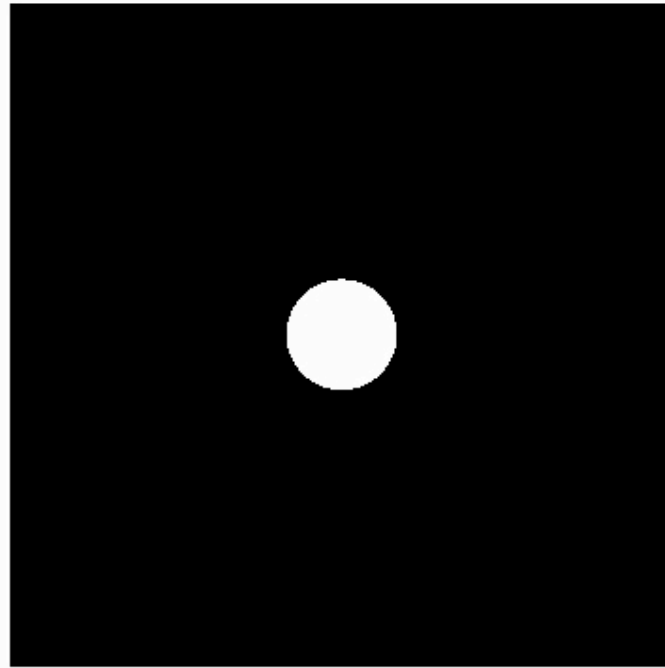
Traction avec ou sans contact unilatéral



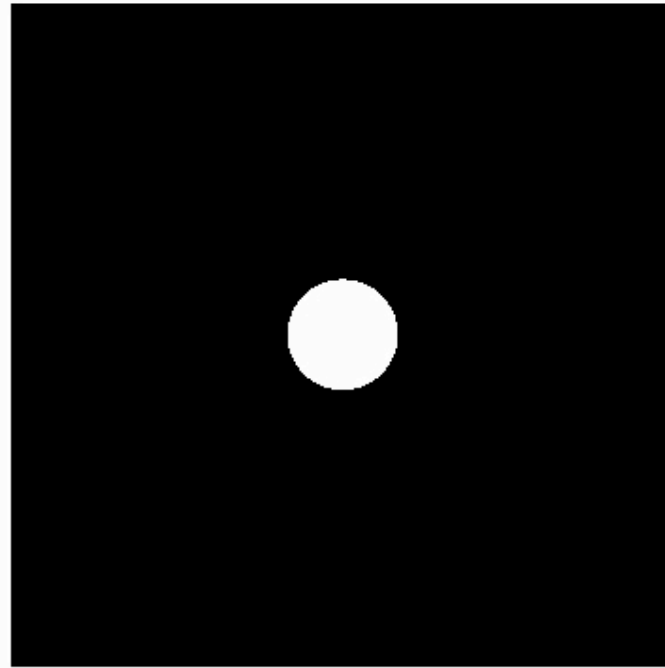
Compression avec mode II



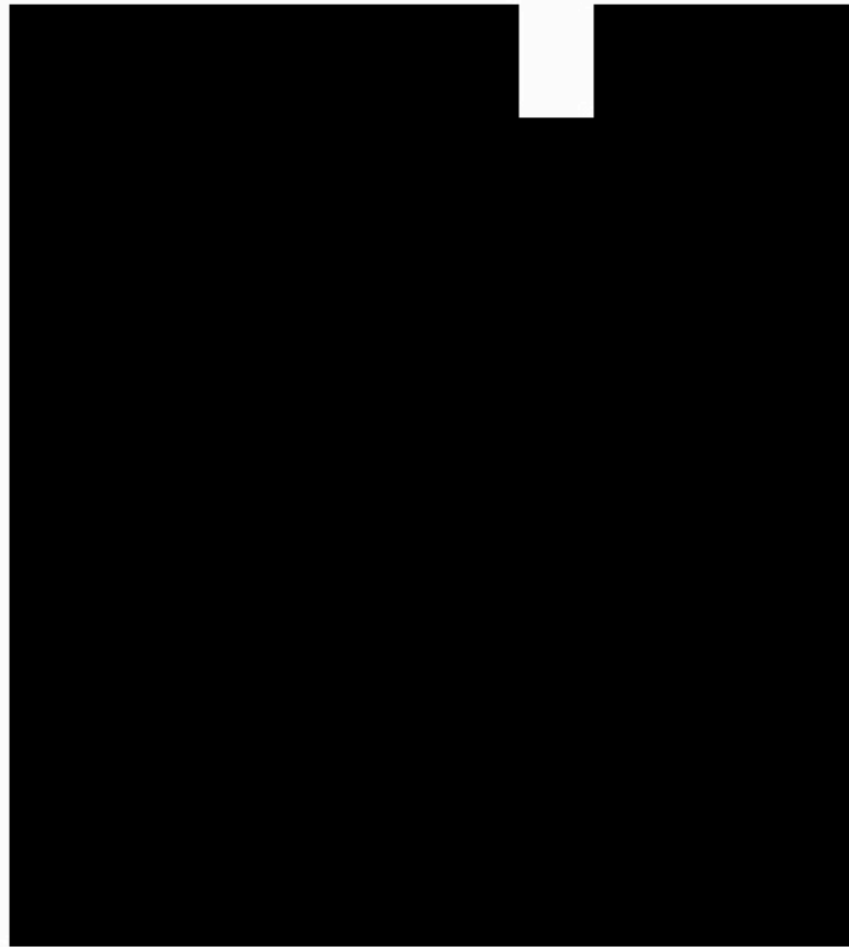
Compression avec contact unilatéral



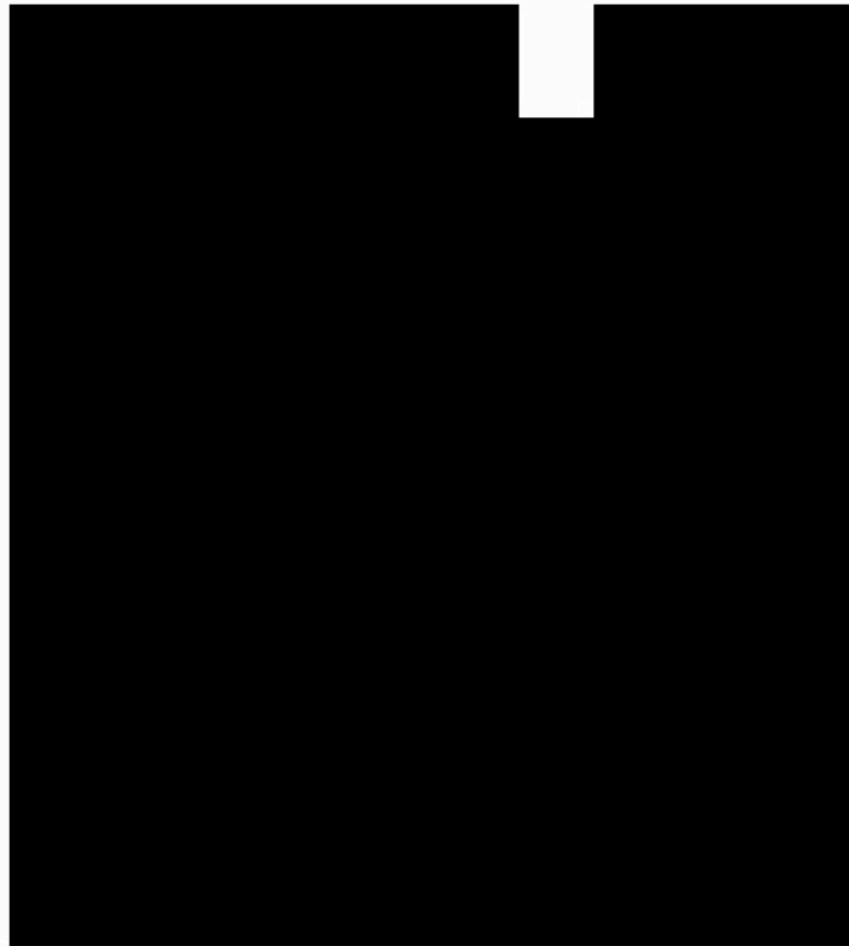
Traction sans contact unilatéral



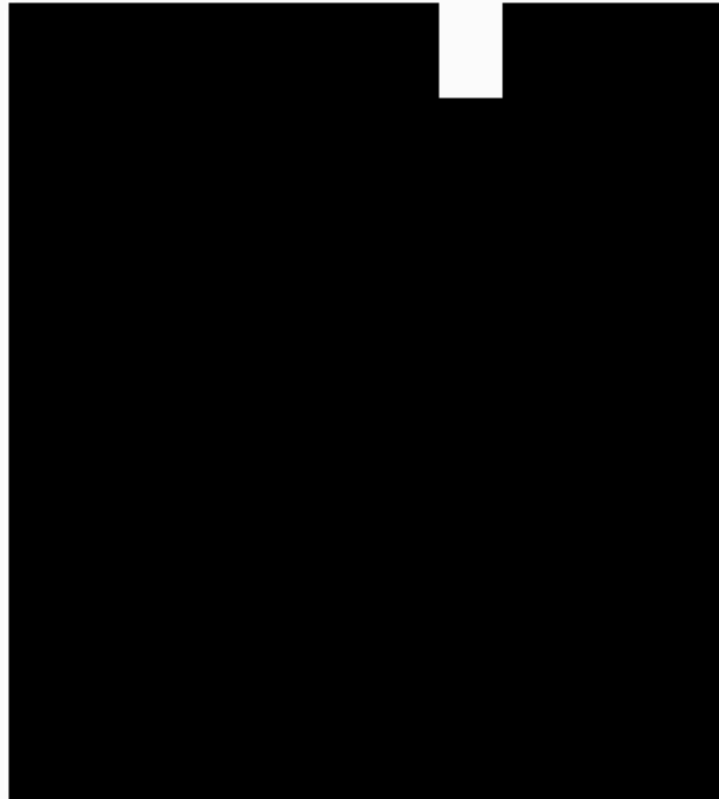
Traction avec contact unilatéral



Compression avec mode II



Compression avec contact unilatéral



Traction avec contact unilatéral