

QUELQUES EXEMPLES D'HOMOGENEISATION PERIODIQUE EN MILIEUX POREUX

G. ALLAIRE CMAP, Ecole Polytechnique

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire>

1. Introduction
2. Convection-diffusion en milieux poreux
3. Un cas plus difficile avec chimie
4. Quelques autres modèles

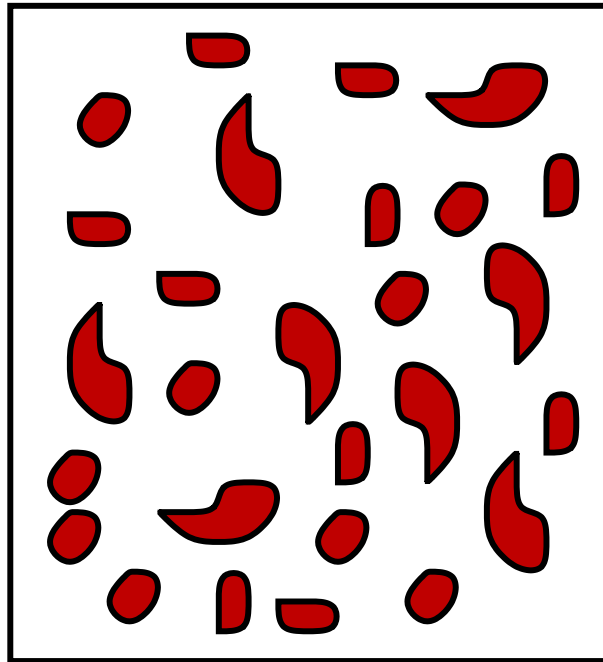
-I- INTRODUCTION

Homogénéisation = techniques de moyennisation des modèles décrits par des équations aux dérivées partielles.

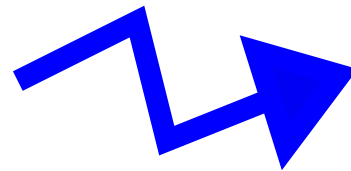
Utilisation typique :

- ➡ Calcul de coefficients homogénéisés (ou effectifs, ou macroscopiques)
- ➡ **Modélisation: dérivation de nouveaux modèles**
- ➡ Construction de méthodes numériques multi-échelles en milieu hétérogène
- ➡ Méthode d'homogénéisation en optimisation topologique de formes

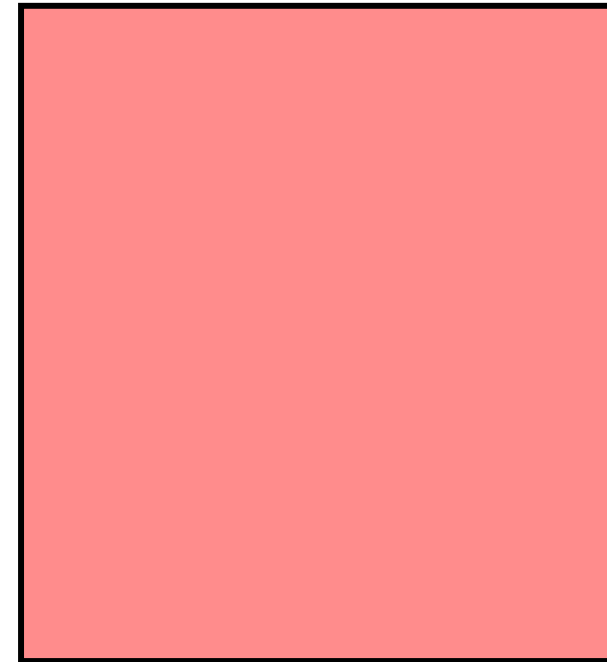
NOTION D'HOMOGENEISATION



MILIEU HETEROGENE



PRISE
DE
MOYENNE



MILIEU EFFECTIF

Homogénéisation: théorie mathématique de la moyennisation. Comment remplacer un milieu très hétérogène par un milieu homogène (plus facile à calculer) ?

REFERENCES

Bakhvalov N., Panasenko G.; *Homogenization : averaging processes in periodic media*, Mathematics and its applications, vol.36, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1990).

Bensoussan, A.; Lions, J.-L.; Papanicolaou, G.; *Asymptotic analysis for periodic structures*; North-Holland: Amsterdam, 1978.

Sanchez-Palencia E.; *Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture notes in physics 127, Springer Verlag (1980).

Hornung U., editor; *Homogenization and porous media*, Interdisciplinary Applied Mathematics Series, vol. 6, Springer Verlag (1997).

-II- CONVECTION-DIFFUSION EN MILIEUX POREUX

Equation de convection-diffusion:

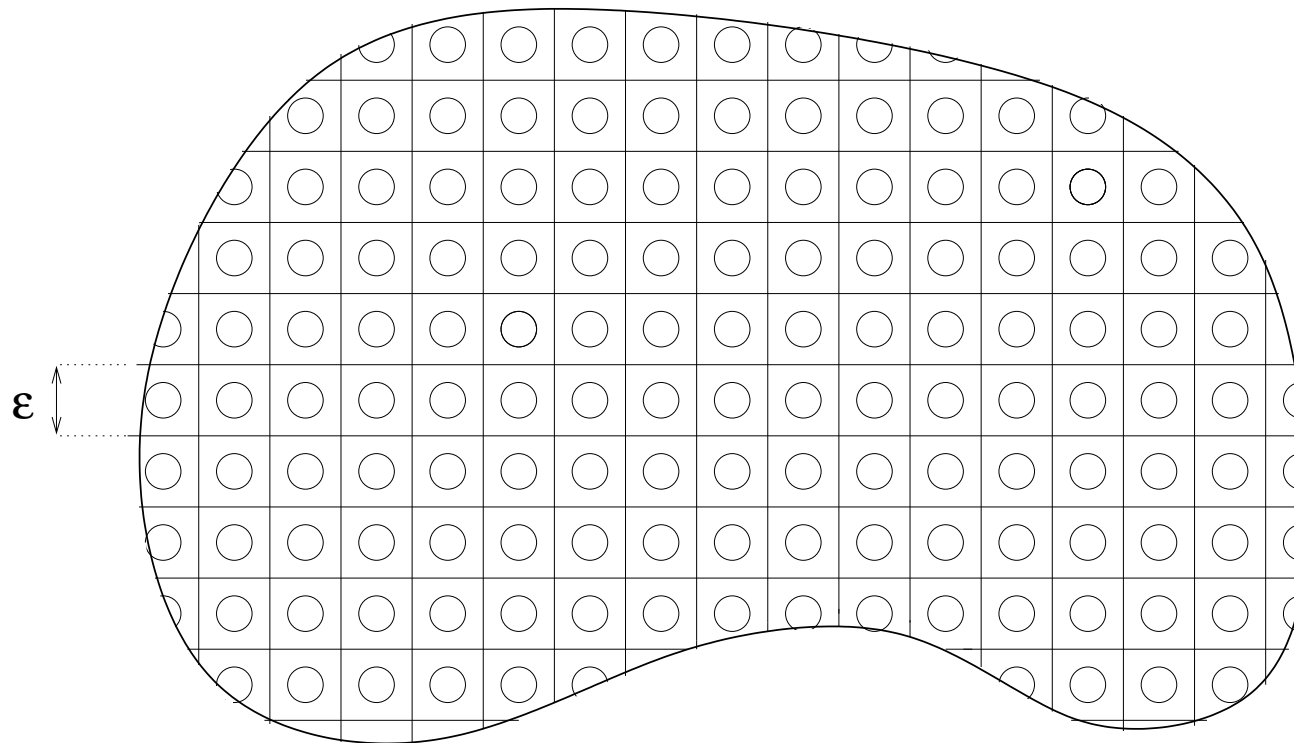
$$\begin{cases} c\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \epsilon^{-1} b\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \nabla u_\epsilon - \operatorname{div}\left(D\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u_\epsilon\right) = f & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ D\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u_\epsilon \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \\ u_\epsilon(0) = u_{init} \end{cases}$$

Milieu poreux périodique

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bigcup_j \mathcal{O}_j^\epsilon \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^\epsilon = \epsilon \mathcal{O}$$

Cellule de périodicité $Y = (0, 1)^N$.

$Y = Y^* \cup \mathcal{O}$ avec $Y^* =$ partie fluide et $\mathcal{O} =$ partie solide.

MILIEU POREUX PERIODIQUE Ω

Hypothèses sur les coefficients

Tortuosité $c(y) \geq c_0 > 0$ pour $y \in Y = (0, 1)^N$.

Tenseur symétrique défini positif de diffusion

$$D(y), \quad y = \frac{x}{\epsilon} \in Y = (0, 1)^N$$

Vitesse de convection, incompressible, à moyenne nulle et non pénétrante

$$\operatorname{div}_y b(y) = 0, \quad \int_Y b(y) dy = 0, \quad b \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}$$

Chacune de ces 3 conditions est essentielle !

Tous périodiques.

Hypothèses de l'homogénéisation périodique

- ➔ Rapport de la période sur la taille caractéristique de la structure = ϵ .
- ➔ Bien que, pour le problème considéré, il n'y ait qu'une seule valeur physique ϵ_0 du paramètre ϵ , on considère une **suite de problèmes** avec ϵ de plus en plus petit.
- ➔ On fait une **analyse asymptotique** quand ϵ tend vers 0.
- ➔ On approchera le "vrai problème" ($\epsilon = \epsilon_0$) par le problème limite obtenu quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Développements asymptotiques à deux échelles

On suppose que

$$u_\epsilon(t, x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i \left(t, x, \frac{x}{\epsilon} \right),$$

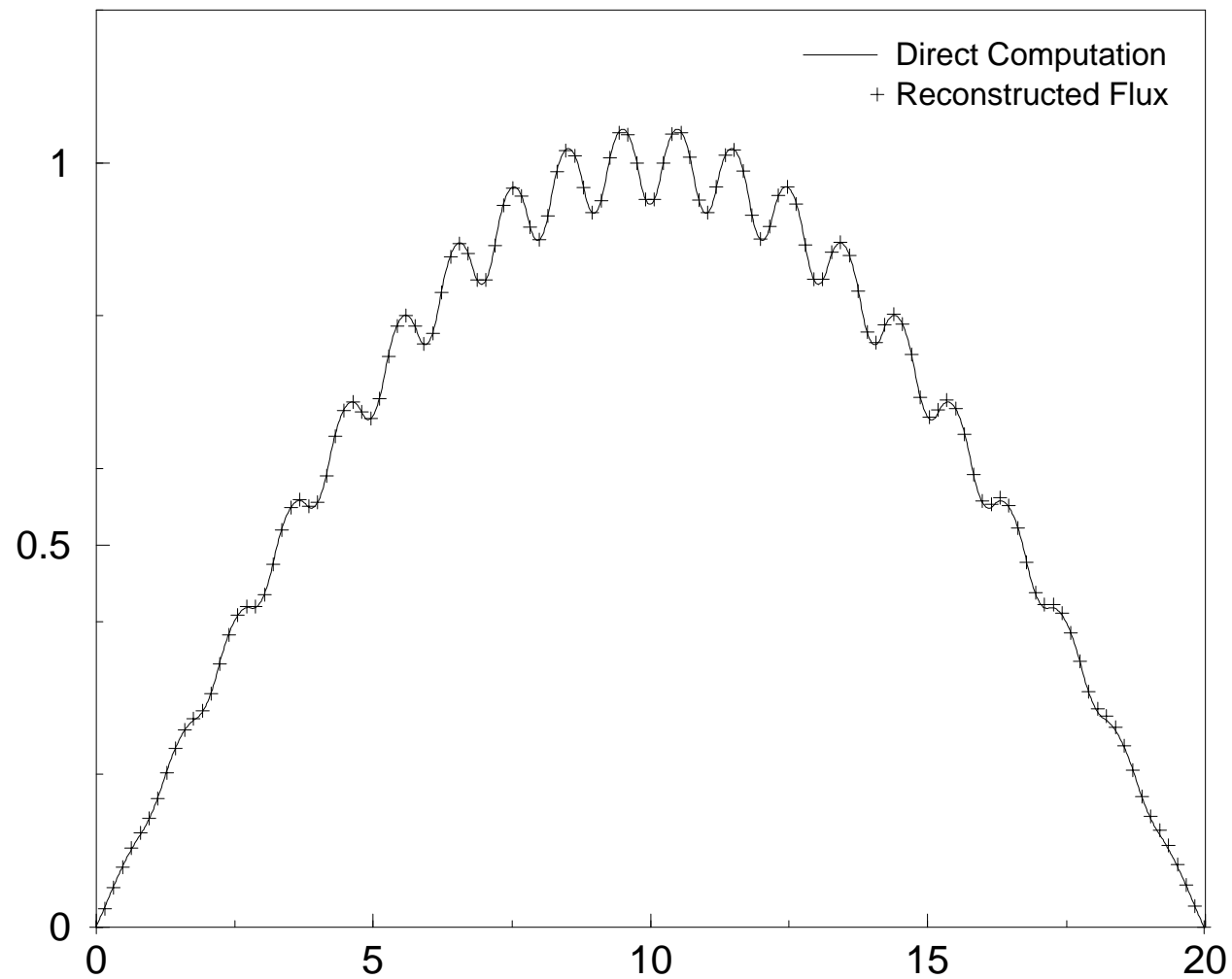
avec $u_i(t, x, y)$ fonction de deux variables d'espace x et y , **périodique en y** de période $Y = (0, 1)^N$. On injecte cette série dans l'équation et on utilise la règle

$$\nabla \left(u_i \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right) = \left(\epsilon^{-1} \nabla_y u_i + \nabla_x u_i \right) \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right).$$

On a donc

$$\nabla u_\epsilon(x) = \epsilon^{-1} \nabla_y u_0 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) + \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i \left(\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i \right) \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right).$$

Allure typique de la fonction $x \rightarrow u_i(x, \frac{x}{\epsilon})$



CASCADE D'EQUATIONS

- ➔ On identifie chaque puissance de ϵ .
- ➔ On remarque que $\phi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) = 0 \quad \forall x, \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x, y) \equiv 0 \quad \forall x, y$.
- ➔ Seuls les 3 premiers termes de la série seront importants.

Dans le volume Ω_ϵ :

$$\epsilon^{-2} \left[b \cdot \nabla_y u_0 - \operatorname{div}_y (D \nabla_y u_0) \right] \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right)$$

$$+ \epsilon^{-1} \left[b \cdot (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1) - \operatorname{div}_y (D(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)) + \operatorname{div}_x (D \nabla_y u_0) \right] \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right)$$

$$+ \epsilon^0 \left[c \frac{\partial u_0}{\partial t} + b \cdot (\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2) - \operatorname{div}_x (D(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)) \right. \\ \left. - \operatorname{div}_y (D(\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2)) \right] \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) + \dots = f(x)$$

Sur le bord $\partial\Omega_\epsilon$:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-1} [D\nabla_y u_0 \cdot n] \left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \\ & + \epsilon^0 [D(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1) \cdot n] \left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \\ & + \epsilon^1 [D(\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2) \cdot n] \left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \\ & + \dots = 0 \end{aligned}$$

$Y = Y^* \cup \mathcal{O}$ avec Y^* = partie fluide et \mathcal{O} = partie solide.

Lemme technique. (alternative de Fredholm) Le problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} b(y) \cdot \nabla_y v(y) - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y v(y)) = g(y) \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y v(y) \cdot n = h(y) \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow v(y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{array} \right.$$

admet une solution, unique à l'addition d'une constante près, **si et seulement si**

$$\int_{Y^*} g(y) dy + \int_{\partial \mathcal{O}} h(y) ds = 0.$$

Preuve:

Vérifions qu'il s'agit d'une condition nécessaire d'existence. On intègre l'équation sur Y^*

$$\int_{Y^*} b \cdot \nabla_y v \, dy = \int_{Y^*} \operatorname{div}_y(bv) \, dy = \int_{\partial\mathcal{O}} v b \cdot n \, ds + \int_{\partial Y} v b \cdot n \, ds = 0$$

car $\operatorname{div}_y b = 0$ et $b \cdot n = 0$ sur $\partial\mathcal{O}$. D'autre part

$$\int_{Y^*} \operatorname{div}_y \left(D(y) \nabla_y v(y) \right) dy = \int_{\partial\mathcal{O}} D(y) \nabla_y v(y) \cdot n \, ds + \int_{\partial Y} D(y) \nabla_y v(y) \cdot n \, ds$$

où les intégrales sur ∂Y disparaissent à cause des **conditions aux limites de périodicité**: $v(y)b(y)$ et $D(y)\nabla_y v(y)$ sont périodiques et la normale n change de signe sur des cotés opposés de Y .

Equation en ϵ^{-2} :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(y) \cdot \nabla_y u_0(x, y) - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_0(x, y)) = 0 \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y u_0(x, y) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} \\ y \rightarrow u_0(x, y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une e.d.p. en y (x n'est qu'un paramètre).

Par unicité de la solution (à une constante près), on en déduit

$$\boxed{u_0(x, y) \equiv u(x)}$$

Equation en ϵ^{-1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(y) \cdot \nabla_y u_1(x, y) - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_1(x, y)) = \\ \quad -b(y) \cdot \nabla_x u(x) + \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_x u(x)) \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y u_1(x, y) \cdot n = -D(y) \nabla_x u(x) \cdot n \text{ sur } \partial\mathcal{O} \\ y \rightarrow u_1(x, y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{array} \right.$$

La CNS d'existence est vérifiée car $\int_{Y^*} b(y) dy = 0$.

Pour $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ base canonique de \mathbb{R}^N , on introduit les **problèmes de cellule**

$$\left\{ \begin{array}{l} b(y) \cdot \nabla_y (e_i + \nabla_y w_i(y)) - \operatorname{div}_y (D(y) (e_i + \nabla_y w_i(y))) = 0 \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y w_i(y) \cdot n = -D(y) e_i \cdot n \text{ sur } \partial\mathcal{O} \\ y \rightarrow w_i(y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{array} \right.$$

On obtient que u_1 dépend linéairement de $\nabla_x u$:

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i(y)$$

Equation en ϵ^0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(y) \cdot \nabla_y u_2(x, y) - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_2(x, y)) = -b(y) \cdot \nabla_x u_1(x, y) \\ + \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (D(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) - c(y) \frac{\partial u}{\partial t}(x) + f(x) \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y u_2(x, y) \cdot n = -D(y) \nabla_x u_1(x, y) \cdot n \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow u_2(x, y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{array} \right.$$

CNS d'existence et d'unicité de la solution u_2 :

$$\int_{Y^*} \left(-b \cdot \nabla_x u_1 + \operatorname{div}_y (D \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (D (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) - c \frac{\partial u}{\partial t} + f \right) dy - \int_{\partial \mathcal{O}} D \nabla_x u_1 \cdot n ds = 0$$

On remplace u_1 par sa valeur en fonction de $\nabla_x u(x)$ et on trouve le **problème homogénéisé**

$$c^* \frac{\partial u}{\partial t}(x) - \operatorname{div}_x (D^* \nabla_x u(x)) = f(x) \text{ dans } \Omega$$

Porosité homogénéisée:

$$c^* = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} c(y) dy,$$

Tenseur de diffusion homogénéisé:

$$D_{ij}^* = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} D(y) (e_i + \nabla_y w_i(y)) \cdot (e_j + \nabla_y w_j(y)) dy.$$

- ⇒ La formule pour D^* n'est pas totalement explicite car il faut résoudre les problèmes de cellule.
- ⇒ D^* ne dépend ni de Ω , ni de f , ni des conditions aux limites.
- ⇒ **Le tenseur D^* caractérise le milieu poreux.**

PROBLEME HOMOGENEISE

$$\begin{cases} c^* \frac{\partial u}{\partial t}(x) - \operatorname{div} (D^* \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u(0) = u_{init} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec

$$D_{ij}^* = \int_{Y^*} D(y) (e_i + \nabla w_i) \cdot (e_j + \nabla w_j) dy$$

avec $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ la base canonique de \mathbb{R}^N . Le **problème de cellule** est

$$\begin{cases} b(y) \cdot \nabla_y (e_i + \nabla_y w_i(y)) - \operatorname{div}_y (D(y) (e_i + \nabla_y w_i(y))) = 0 & \text{dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y w_i(y) \cdot n = -D(y) e_i \cdot n & \text{sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow w_i(y) & Y\text{-périodique,} \end{cases}$$

Il donne la réponse du milieu poreux à un gradient moyen.

Conclusion sur cette exemple: on a trouvé un tenseur effectif de diffusion, la vitesse de convection effective est nulle, et on n'a pas changé de modèle.

$$u_\epsilon(t, x) \approx u(t, x) + \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t, x) w_i \left(\frac{x}{\epsilon} \right)$$

Le reste de l'ansatz est **faux** en général car il manque des couches limites.

Cette approche se généralise aux cas **non périodiques**.

On peut faire mieux ! On peut combiner homogénéisation et perturbation singulière.

-III- CONVECTION-DIFFUSION-REACTION

Equation de convection-diffusion-réaction:

$$\begin{cases} c\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \epsilon^{-1} b\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \nabla u_\epsilon - \operatorname{div}\left(D\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u_\epsilon\right) + \epsilon^{-2} r\left(\frac{x}{\epsilon}\right) u_\epsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ D\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u_\epsilon \cdot n + k\epsilon^{-1} u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \\ u_\epsilon(0) = u_{init} \end{cases}$$

Tortuosité $c(y) \geq c_0 > 0$.

Tenseur symétrique défini positif de diffusion $D(y)$.

Vitesse de convection $b(y)$ **sans aucune hypothèse**.

Coefficients de chimie $r(y)$ et k .

Cellule $Y = Y^* \cup \mathcal{O}$ avec $Y^* =$ partie fluide et $\mathcal{O} =$ partie solide.

Scaling

- ⇒ Changement de variable $y = \frac{x}{\epsilon}$ et $\tau = \frac{t}{\epsilon^2} \Rightarrow$ plus de puissance de ϵ dans l'équation.
- ⇒ Nombres de Péclet et de Damkohler **microscopiques** de l'ordre de 1 (donc "grands" à l'échelle macroscopique).
- ⇒ Scaling "critique".

Changement de stratégie !

Développements asymptotiques à grande dérive $b^* \in \mathbb{R}^N$:

$$u_\epsilon(t, x) = e^{-r^* \epsilon^{-2} t} \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i \left(t, x - \frac{b^* t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon} \right),$$

avec $u_i(t, x, y)$ fonction de deux variables d'espace x et y , **périodique en y** de période $Y = (0, 1)^N$. On injecte cette série dans l'équation et on utilise la règle

$$\nabla \left(u_i \left(t, x - \frac{b^* t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon} \right) \right) = \left(\epsilon^{-1} \nabla_y u_i + \nabla_x u_i \right) \left(t, x - \frac{b^* t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon} \right).$$

On a aussi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u_i \left(t, x - \frac{b^* t}{\epsilon}, \frac{x}{\epsilon} \right) \right) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \epsilon^{-1} b^* \cdot \nabla_x u_i \right) \left(t, x, \frac{x}{\epsilon} \right)$$

On a besoin des 2 nouveaux paramètres b^* (vitesse effective) et r^* (coefficient de réaction) pour que les CNS des problèmes de cellule soient satisfaites !

Résultat

$$u_\epsilon(t, x) \approx e^{-r^* \epsilon^{-2} t} \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \psi^*\left(\frac{x}{\epsilon}\right) u\left(t, x - \frac{b^* t}{\epsilon}\right)$$

Problème homogénéisé:

$$\begin{cases} c^* \frac{\partial u}{\partial t}(x) - \operatorname{div}(D^* \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(0) = u_{init} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec des formules nouvelles pour c^* et D^* .

Problème spectral de cellule:

$$\begin{cases} b(y) \cdot \nabla_y \psi - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y \psi) + r(y) \psi = r^* c(y) \psi & \text{dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y \psi \cdot n + k \psi = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow \psi(y) & Y - \text{périodique} \end{cases}$$

Problème spectral **adjoint** de cellule:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (b(y) \psi^*) - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y \psi^*) + r(y) \psi^* = r^* c(y) \psi^* & \text{dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y \psi^* \cdot n + k \psi^* = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow \psi^*(y) & Y - \text{périodique} \end{cases}$$

Première valeur propre r^* , première fonction propre $\psi(y) > 0$ (**équilibre local entre diffusion et réaction**) et première fonction propre adjointe $\psi^*(y) > 0$.

Vitesse effective:

$$b^* = \int_{Y^*} [\psi \psi^* b + \psi D \nabla \psi^* - \psi^* D \nabla \psi] (y) dy$$

Autre écriture du résultat

$$u_\epsilon(t, x) \approx e^{-r^* \epsilon^{-2} t} \psi \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \psi^* \left(\frac{x}{\epsilon} \right) u \left(t, x - \frac{b^* t}{\epsilon} \right) = \psi \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \psi^* \left(\frac{x}{\epsilon} \right) v_\epsilon(t, x)$$

Problème homogénéisé modifié:

$$\begin{cases} c^* \frac{\partial v_\epsilon}{\partial t}(x) + \epsilon^{-1} b^* \cdot \nabla v_\epsilon - \operatorname{div}(D^* \nabla v_\epsilon) + \epsilon^{-2} r^* v_\epsilon = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_\epsilon(0) = u_{init} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Remarques

⇒ On retrouve le cas précédent si $r(y) \equiv 0$, $k = 0$ et vitesse $b(y)$ incompressible à moyenne nulle et non pénétrante.

Dans ce cas on trouve $\psi(y) = \psi^*(y) \equiv 1$, $r^* = 0$ et $b^* = 0$.

⇒ La chimie et le transport **ne se découplent pas** pour le calcul des coefficients effectifs.

⇒ Cf. H. Brenner - P. Adler (1982), R. Mauri (1991), G. Allaire - A.-L. Raphael (2007).

Idée de la démonstration

On définit une nouvelle fonction inconnue

$$w_\epsilon(t, x) = e^{r^* \epsilon^{-2} t} \frac{u_\epsilon(t, x)}{\psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}$$

et on multiplie l'équation pour u_ϵ par $\psi^*\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$.

Un calcul algébrique "miraculeux" donne

$$\begin{cases} \tilde{c}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial w_\epsilon}{\partial t} + \epsilon^{-1} \tilde{b}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \nabla w_\epsilon - \operatorname{div}\left(\tilde{D}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla w_\epsilon\right) = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \tilde{D}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla w_\epsilon \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \\ w_\epsilon(0) = w_{init} \end{cases}$$

avec $\tilde{c} = c\psi\psi^*$, $\tilde{D} = D\psi\psi^*$ et $\tilde{b} = [\Psi_1 \Psi_1^* b + \Psi_1 A^T \nabla \Psi_1^* - \Psi_1^* A \nabla \Psi_1]$.

Cette nouvelle vitesse est incompressible, non pénétrante, et sa moyenne est b^* .

Coefficients homogénéisés

Porosité homogénéisée:

$$c^* = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} (\psi \psi^* c)(y) dy,$$

Tenseur de diffusion homogénéisé:

$$D_{ij}^* = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} (\psi \psi^* D)(y) (e_i + \nabla_y w_i(y)) \cdot (e_j + \nabla_y w_j(y)) dy.$$

avec le **problème de cellule**:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{b}(y) - b^*) \cdot \nabla_y (e_i + \nabla_y w_i(y)) - \operatorname{div}_y \left(\tilde{D}(y) (e_i + \nabla_y w_i(y)) \right) = 0 \quad \text{dans } Y^* \\ \tilde{D}(y) \nabla_y w_i(y) \cdot n = -\tilde{D}(y) e_i \cdot n \quad \text{sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow w_i(y) \end{array} \right. \quad Y\text{-périodique}$$

-IV- QUELQUES AUTRES MODELES

- ➔ Navier-Stokes \Rightarrow Darcy.
- ➔ Navier-Stokes \Rightarrow Brinkman.
- ➔ Double porosité.

Navier-Stokes donne Darcy

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bigcup_j \mathcal{O}_j^\epsilon \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^\epsilon = \epsilon \mathcal{O}$$

Equations (microscopiques) de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \nabla p_\epsilon + u_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon - \mu \Delta u_\epsilon = f & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \operatorname{div} u_\epsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \end{cases}$$

Loi homogénéisée de Darcy:

$$\begin{cases} u = K (f - \nabla p) & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

CONVERGENCE NAVIER-STOKES \rightarrow DARCY

$$u_\epsilon(x) \approx \epsilon^2 \sum_{i=1}^N u_i(x) w_i \left(\frac{x}{\epsilon} \right)$$

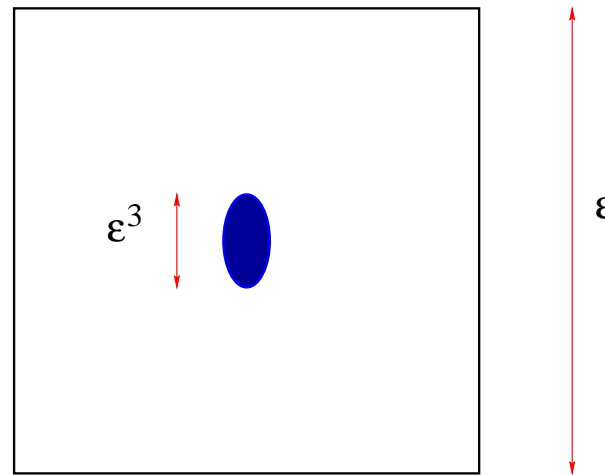
avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla p_i - \Delta w_i = e_i & \text{dans } Y \setminus \mathcal{O} \\ \operatorname{div} w_i = 0 & \text{dans } Y \setminus \mathcal{O} \\ w_i = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow w_i(y) \quad Y\text{-périodique} & \end{array} \right.$$

et

$$K_{ij} = \frac{1}{\mu} \int_Y \nabla w_i \cdot \nabla w_j \, dy.$$

Navier-Stokes donne Brinkman



Milieu poreux à 3 échelles.

Equations (microscopiques) de Navier-Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla p_\epsilon + u_\epsilon \cdot \nabla u_\epsilon - \mu \Delta u_\epsilon = f & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ \operatorname{div} u_\epsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \end{array} \right.$$

LOI DE BRINKMAN

Loi homogénéisée de Brinkman:

$$\begin{cases} \nabla p + u \cdot \nabla u + Mu - \mu \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $M_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}} \nabla w_i \cdot \nabla w_j dx$ et

$$\begin{cases} \nabla p_i - \Delta w_i = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O} \\ \operatorname{div} w_i = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O} \\ w_i = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ w_i \rightarrow e_i & \text{à l}'\infty. \end{cases}$$

Méthodes: formulation variationnelle et notion de capacité, ou développements asymptotiques (pas simples).