

Les modèles d'endommagement à gradient et leur application à la rupture

J.-J. Marigo

(Université Paris 6)

Modélisation de l'endommagement:

1. Insuffisance des modèles locaux
2. Modèles à gradient d'endommagement

Etude qualitative des modèles à gradient:

1. Bifurcations et instabilités
2. Stabilité des états homogènes

Application à la rupture:

1. Griffith revisité
2. Exemple 2D thermique
3. Exemple 3D

Les modèles locaux

Variable (scalaire) d'endommagement: α

variable interne

Relation contrainte-déformation: $\sigma = E(\alpha)\varepsilon$

élasticité variable

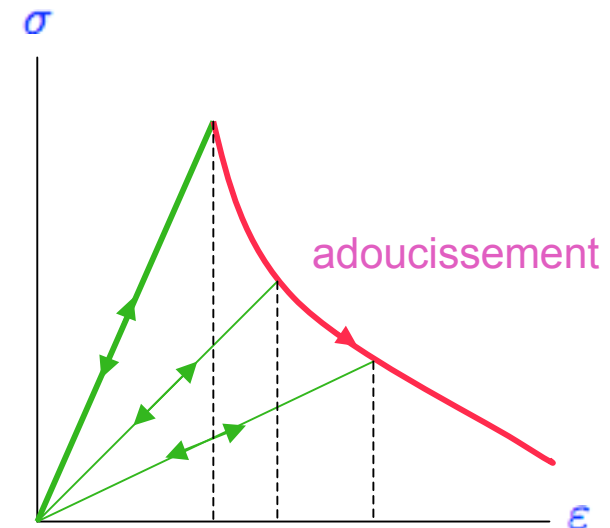
Loi d'évolution de l'endommagement

$$-\frac{1}{2}E'(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon \leq w'(\alpha) \quad \text{critère énergétique}$$

$$\dot{\alpha} \geq 0$$

irréversibilité

$$\left(\frac{1}{2}E'(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + w'(\alpha)\right) \dot{\alpha} = 0 \quad \text{seuil}$$



Adoucissement et convexité

Travail de déformation $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) = \frac{1}{2}E(\alpha)\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + w(\alpha)$

Convexité de W par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$ à α fixé

Convexité de W par rapport à α à $\boldsymbol{\varepsilon}$ fixé

adoucissement

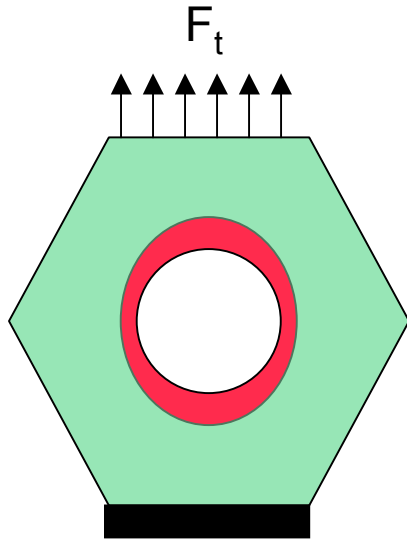


W non convexe par rapport à $(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha)$



Bifurcations, Instabilités et Localisations

Le problème d'évolution



$u(x,t)?$
 $\alpha(x,t)?$

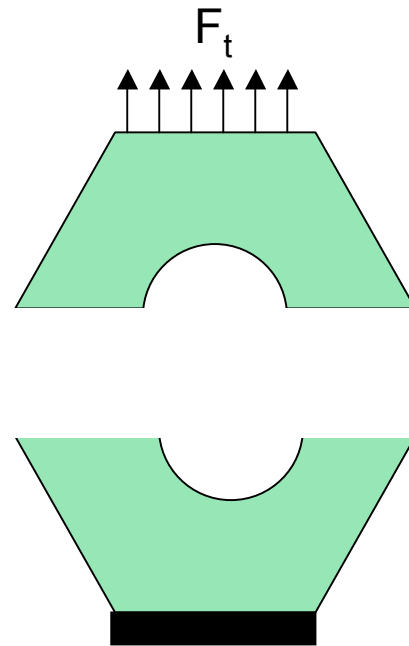
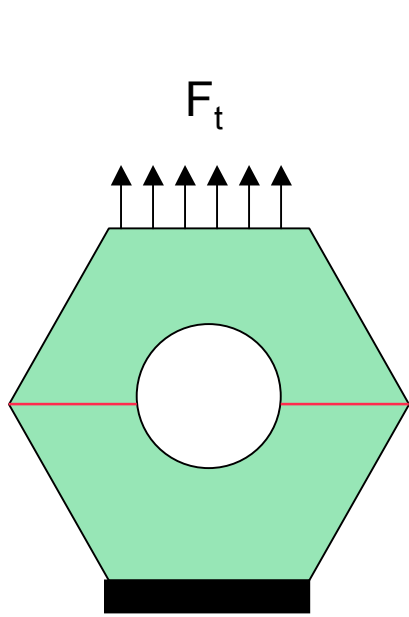
$$\mathcal{P}(u, \alpha) = \int_{\Omega} W(\varepsilon(u), \alpha) dx - f_t(u)$$

Problème variationnel

$$\mathcal{P}'(u, \alpha)(v - \dot{u}, \beta - \dot{\alpha}) \geq 0 \quad \forall v, \forall \beta \geq 0$$



Equilibre + Loi d'évolution



Adoucissement
+
Modèle local



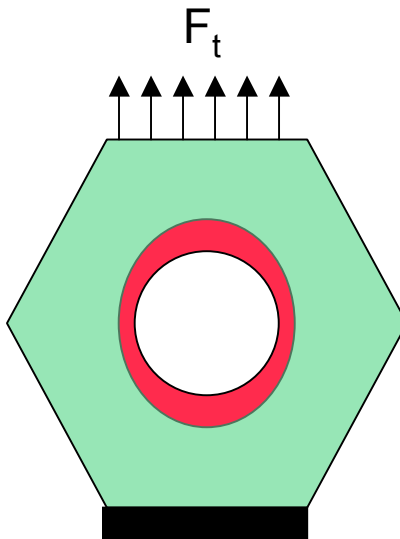
Rupture sans dépense d'énergie

Les modèles non locaux

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = \frac{1}{2}E(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + w(\alpha) + \frac{1}{2}E_0\ell_0^2 \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha$$

terme non local

ℓ_0 longueur caractéristique du matériau

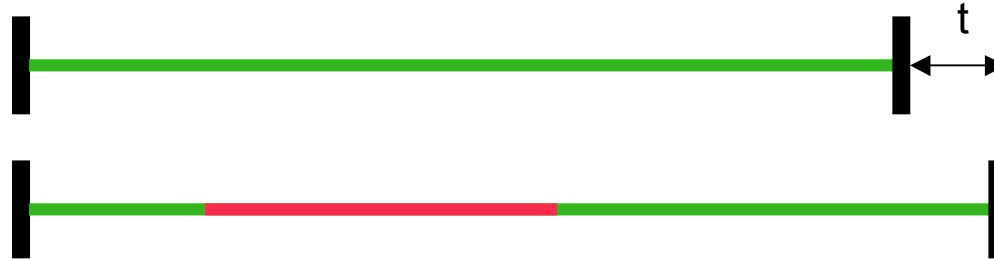


$$\mathcal{P}_t(u, \alpha) = \int_{\Omega} W(\varepsilon(u), \alpha, \nabla\alpha) dx - f_t(u)$$

Problème d'évolution

$$\mathcal{P}'_t(u_t, \alpha_t)(v - \dot{u}_t, \beta - \dot{\alpha}_t) \geq 0, \quad \forall (v, \beta), \quad \beta \geq 0$$

Cas unidimensionnel



Problème d'évolution

$$\dot{\alpha}_t \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{E'(\alpha_t)}{E(\alpha_t)^2} + w'(\alpha_t) - E_0 l^2 \alpha_t'' \geq 0$$

$$\alpha_t'(0) = \alpha_t'(L) = 0$$

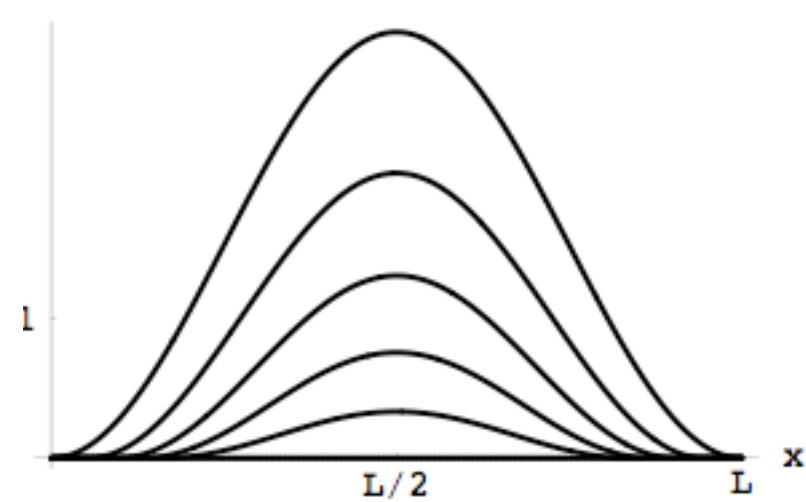
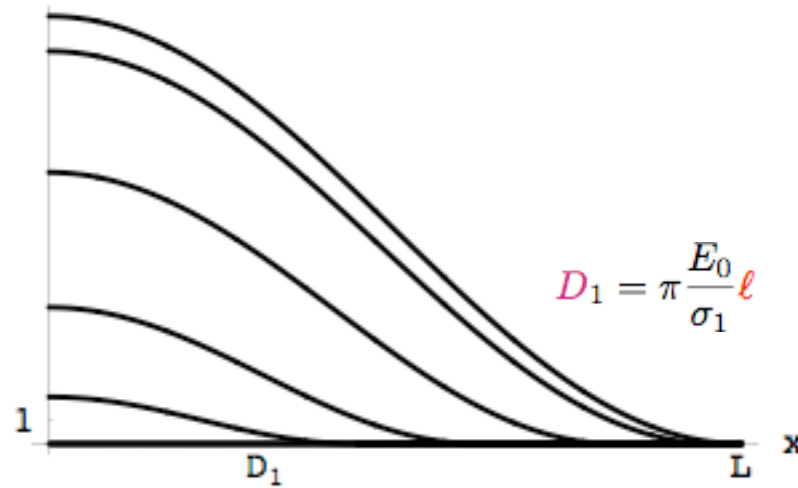
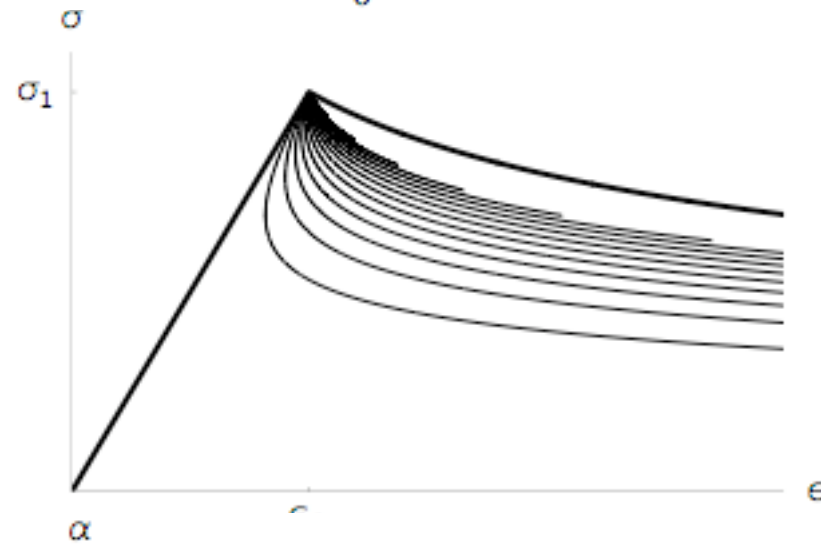
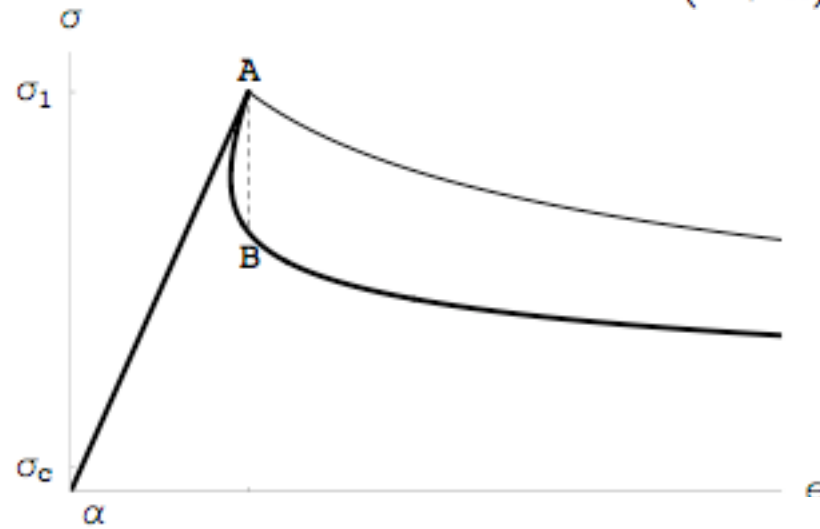
Infinité de solutions



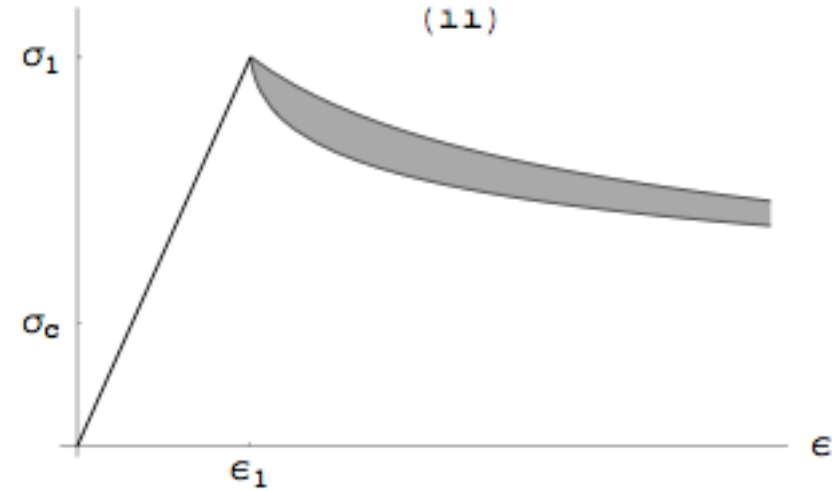
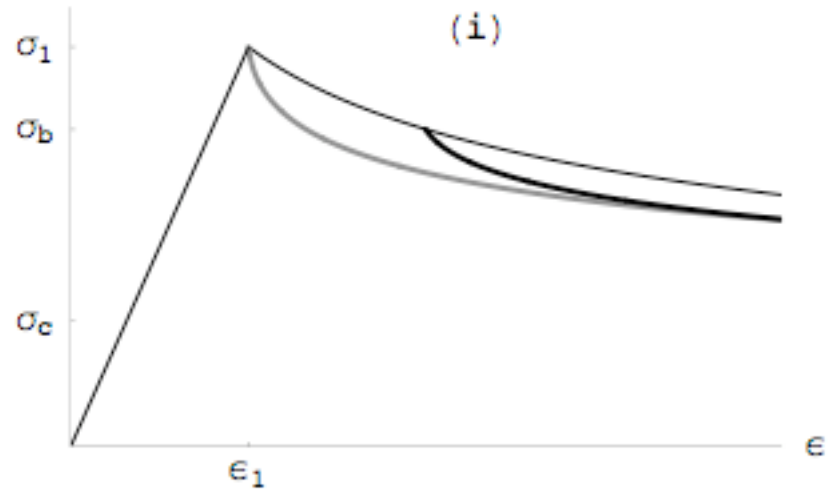
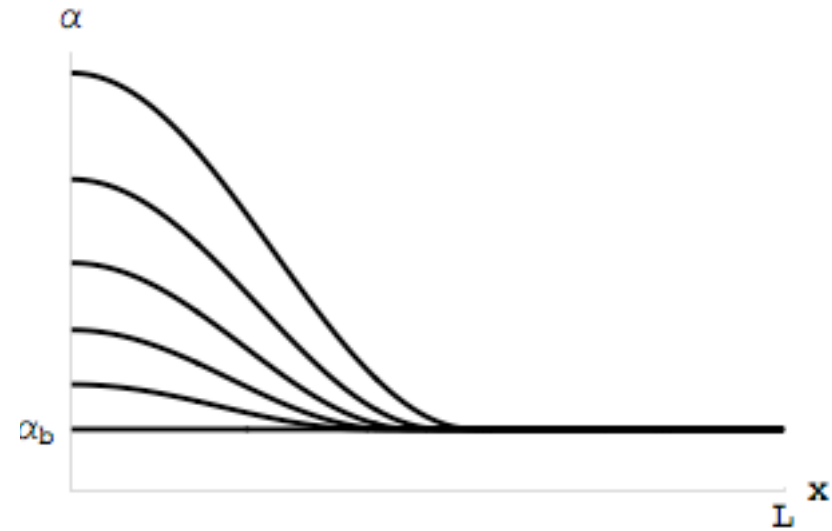
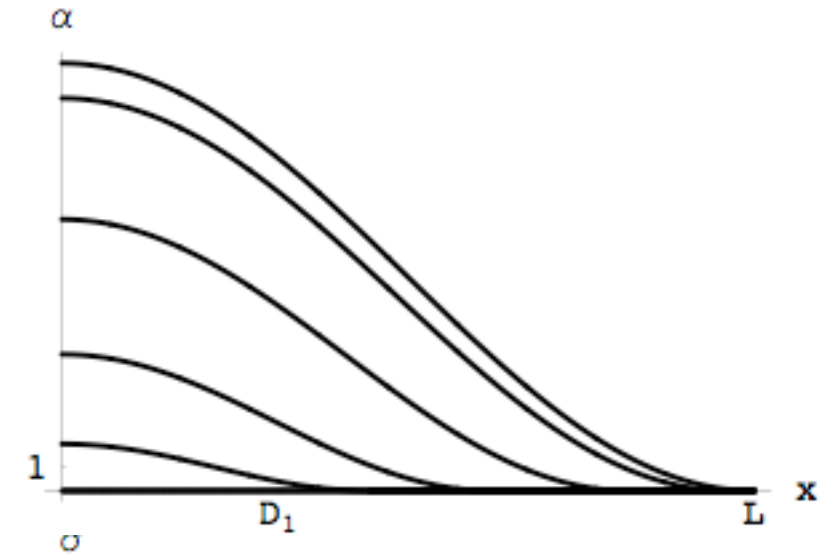
Nécessité d'un critère de sélections

Localisations et instabilités

$$E(\alpha) = \frac{E_0}{(1 + \alpha)^2}, \quad w(\alpha) = \frac{\sigma_1^2}{E_0} \alpha,$$



Bifurcations : un continuum de solutions



Stabilité et minimum d'énergie

Problème de minimisation incrémental

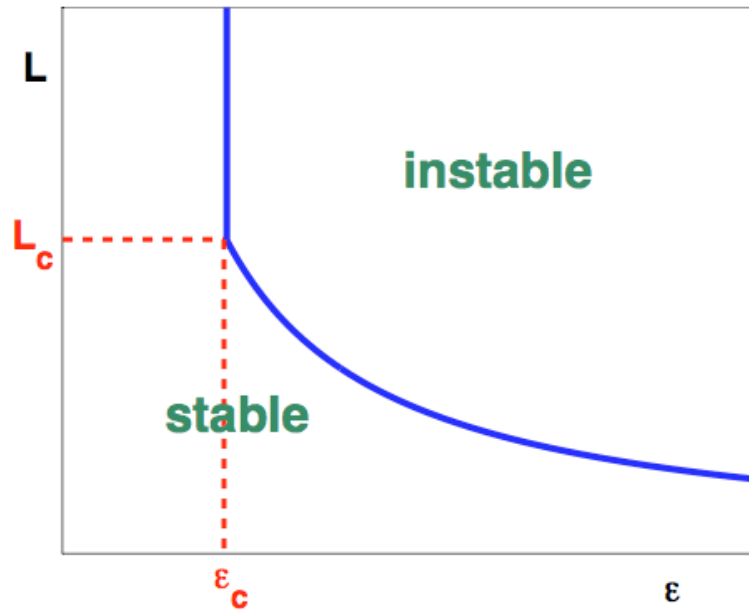
$$\min_u \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} E(\alpha) \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) + w(\alpha) + \frac{1}{2} E_0 \ell_0^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) dx - f_i(u)$$

$\alpha \geq \alpha_{i-1}$

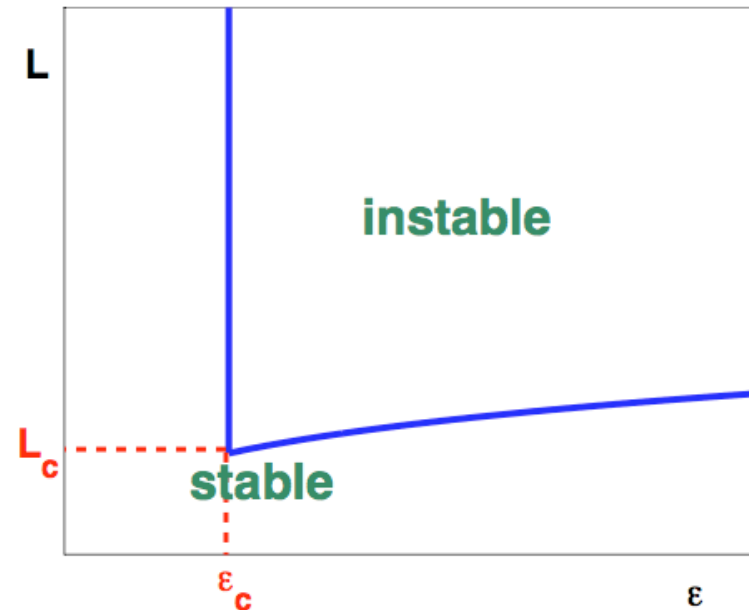
Stabilité des états homogènes

$$E(\alpha) = E_0(1 - \alpha)^p, \quad w(\alpha) = \frac{9\sigma_c}{64} \left(1 - (1 - \alpha)^{p/2} \right), \quad p > 0$$

Même réponse homogène



$p < 4$



$p > 4$

Approche numérique de Griffith révisité

Energie originelle: u discontinu

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{u}) = \int_{\Omega \setminus S_u} \frac{1}{2} A \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \, dx - f_i(\mathbf{u}) + G_c \mathcal{H}^{n-1}(S_u)$$

Energie régularisée: u continu

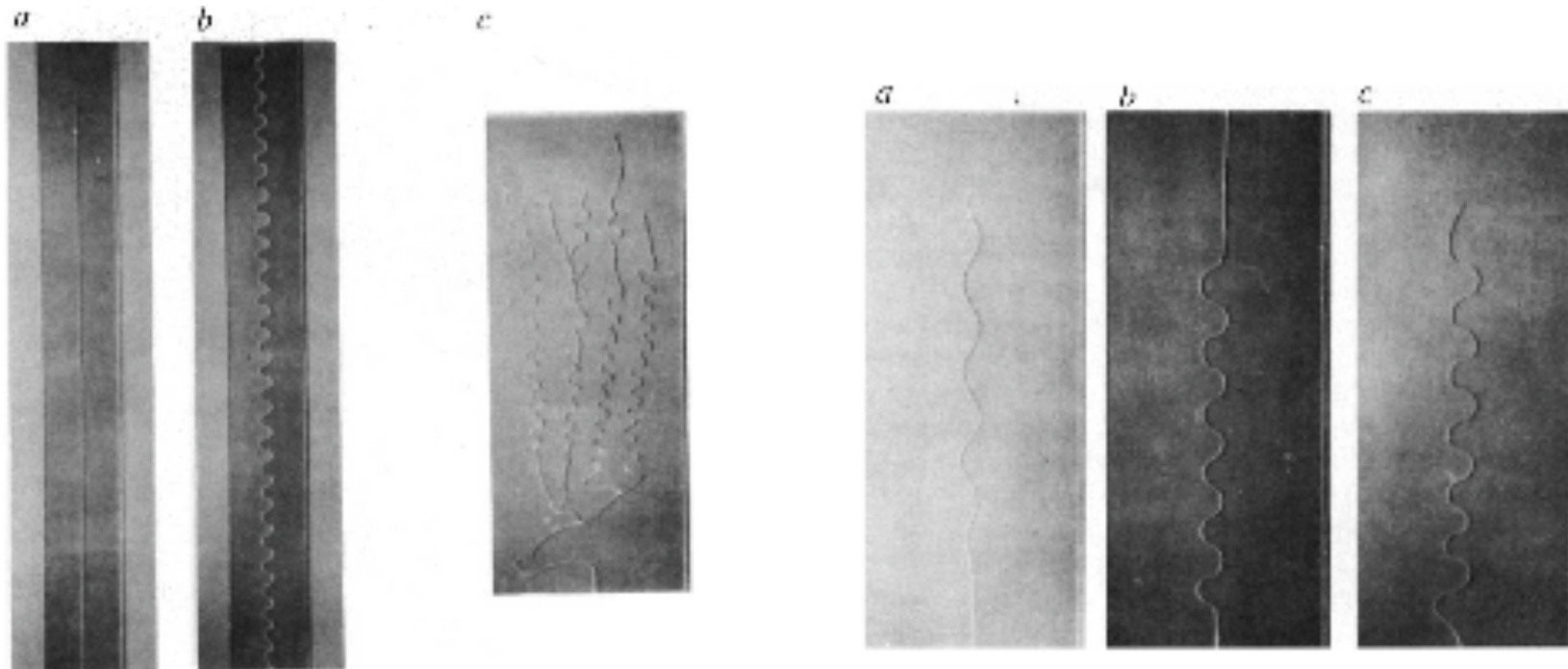
Γ – convergence quand $\ell \rightarrow 0$

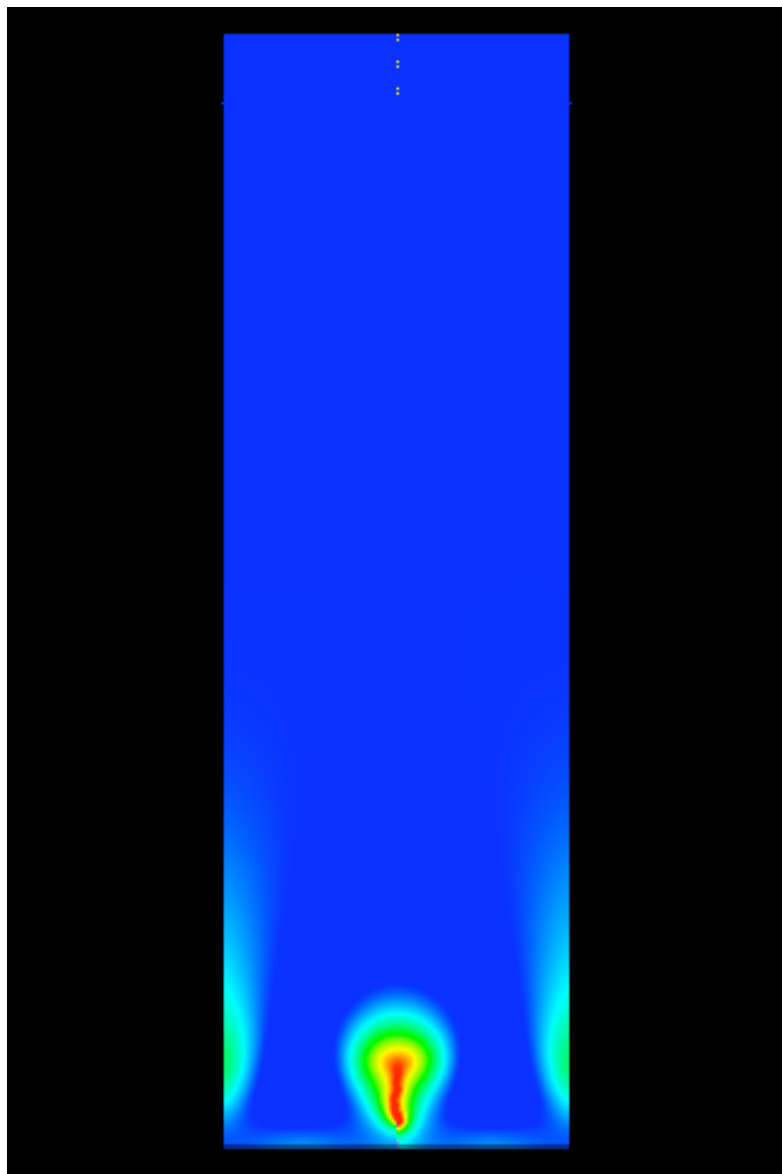
$$\mathcal{E}_i^\ell(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (1 - \alpha)^2 A \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \, dx - f_i(\mathbf{u}) + G_c \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha^2}{4\ell} + \ell \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) dx$$



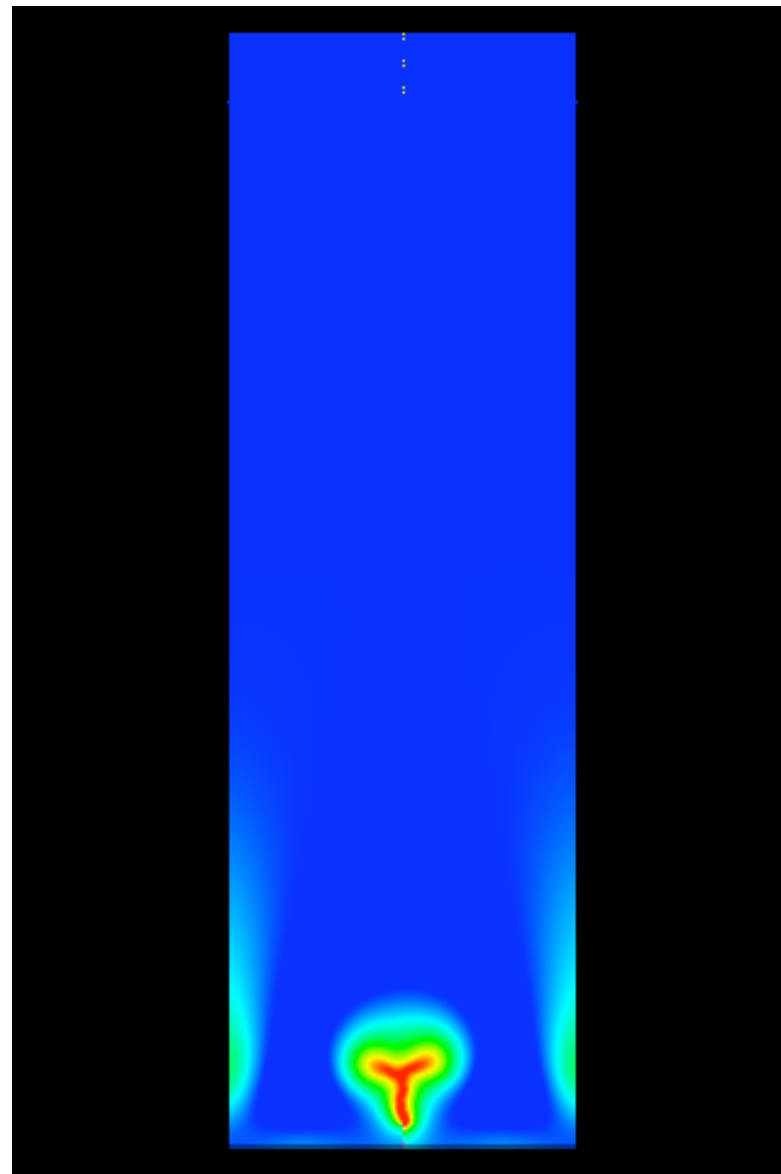
- Éléments finis classiques
- Minimisations alternées quadratiques
- Algorithme de recherche du min global

Fissuration thermique

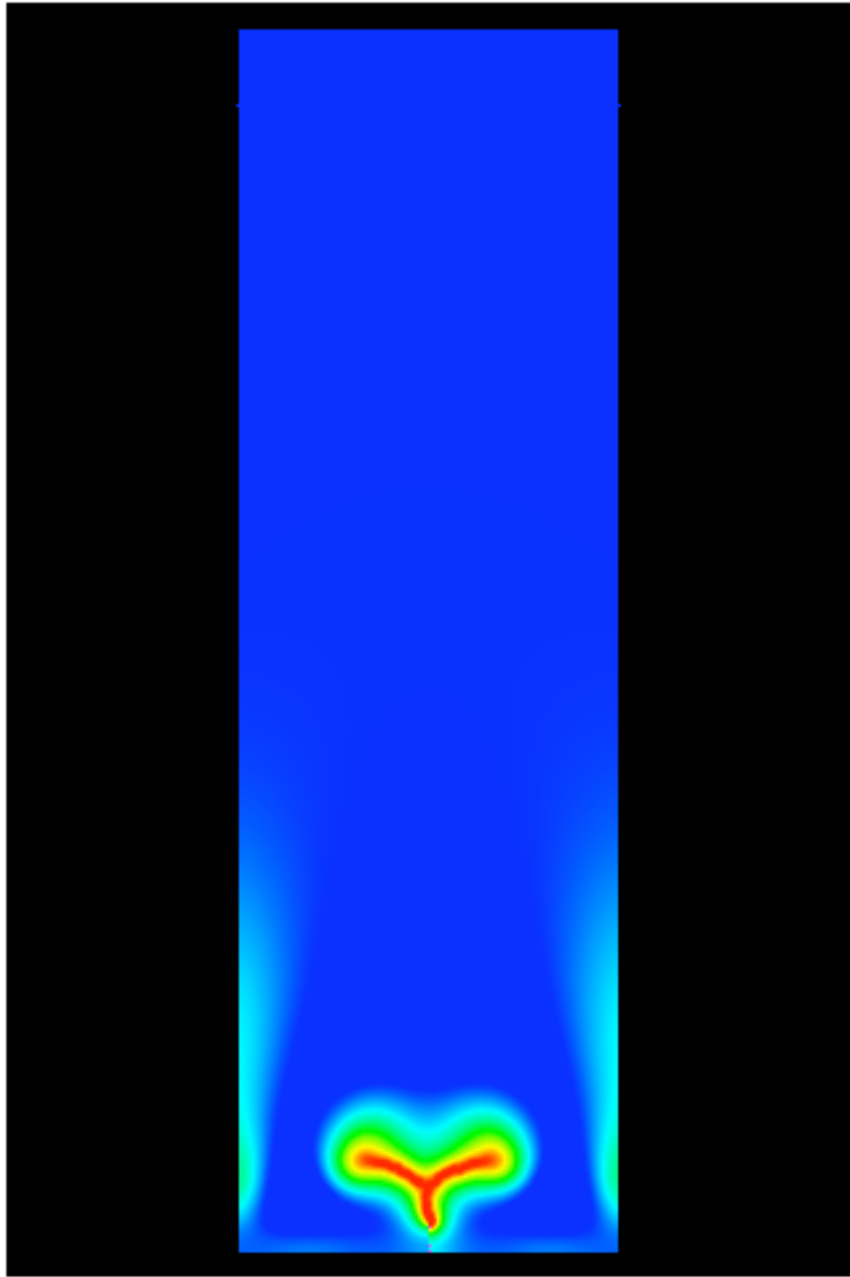




14/11/07 - Fréjus

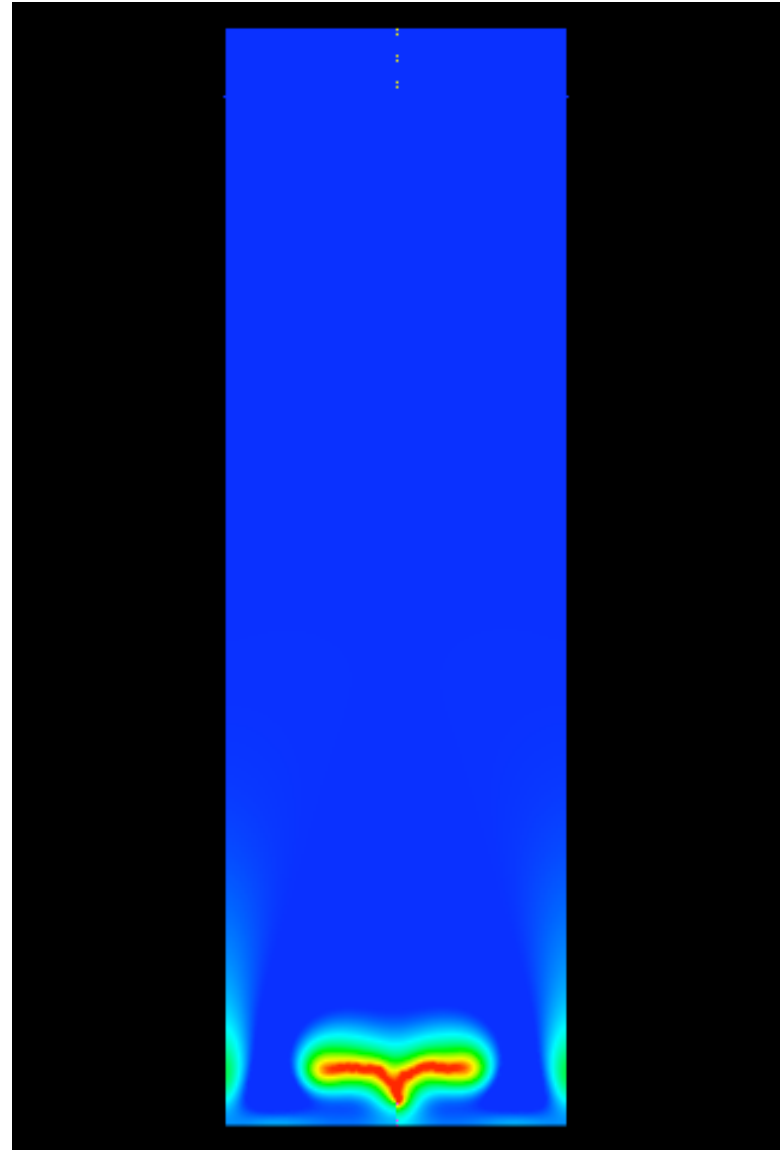


MoMaS



14/11/07 - Fréjus

MoMaS



15

Fissuration transverse vs Décohésion



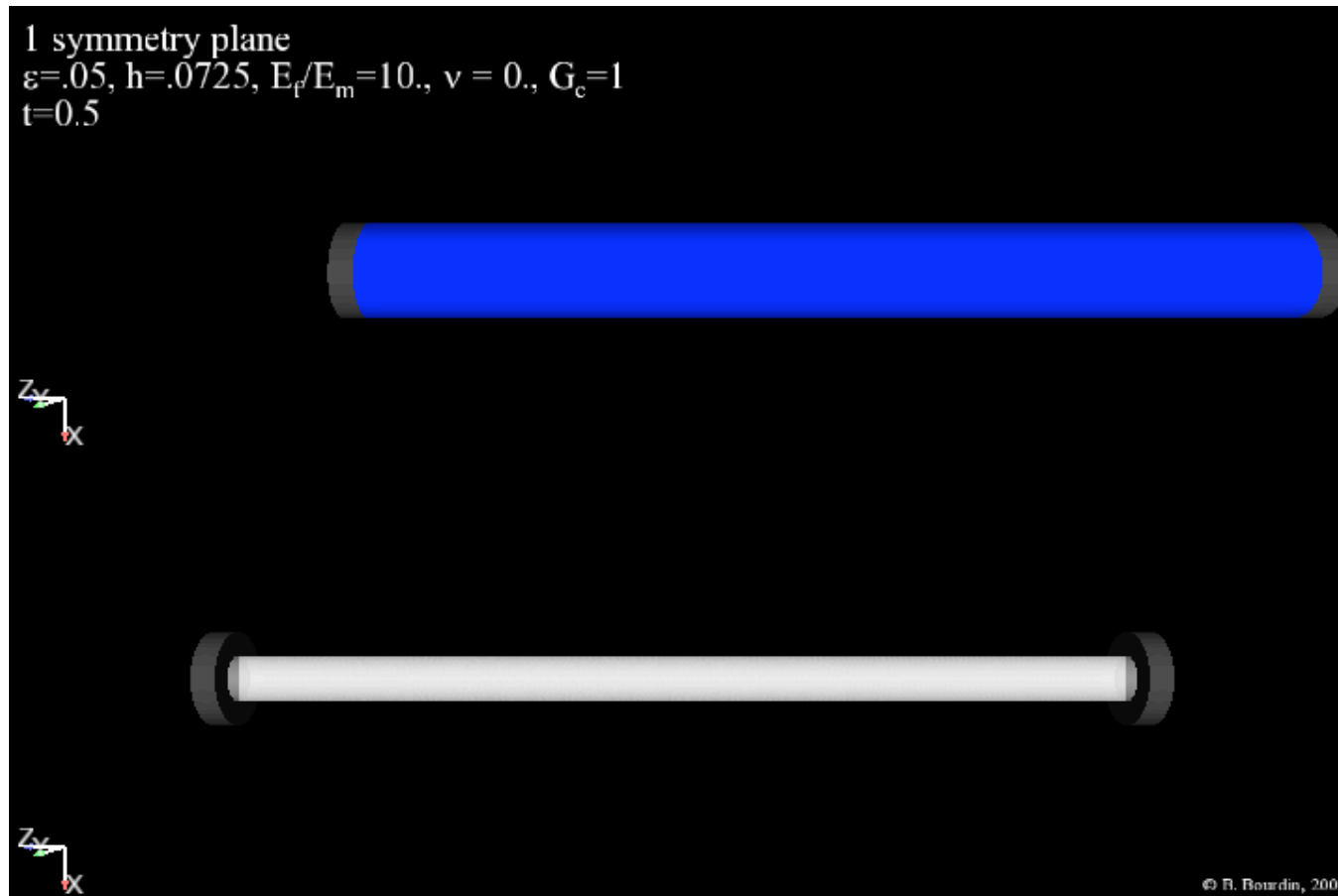
ou



Garrett, Bailey

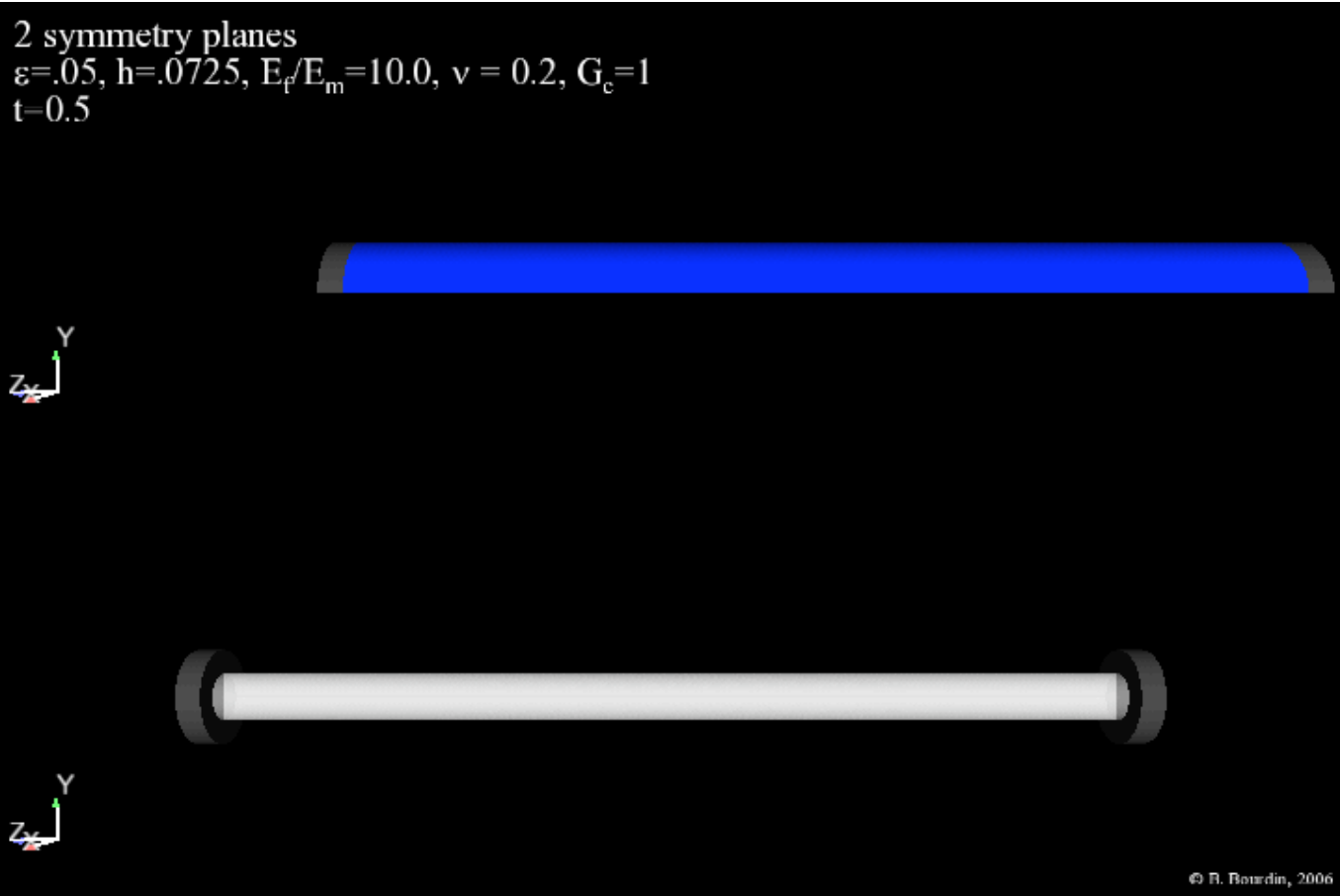
Simulation numérique « libre »

Test 1: Fissuration transverse périodique



2 symmetry planes

$\epsilon=.05$, $h=.0725$, $E_f/E_m=10.0$, $\nu = 0.2$, $G_c=1$
 $t=0.5$



© B. Bourdin, 2006

Test 3: Fissuration hélicoïdale

