

Validation numérique de
l'homogénéisation pour un modèle
simplifié de stockage avec sources
aléatoires

- **Introduction**
 - Modélisation de la migration de radionucléide
 - Vers un modèle probabiliste
- **Calcul des moments**
 - Comportement aléatoire des sources : un exemple
 - Définition et calcul des premiers moments
 - Simulations numériques
- **Homogénéisation du modèle aléatoire**
 - Présentation générale
 - Résultats théoriques
 - Validation numérique

- **Introduction**
 - Modélisation de la migration de radionucléide
 - Vers un modèle probabiliste
- **Calcul des moments**
 - Comportement aléatoire des sources : un exemple
 - Définition et calcul des premiers moments
 - Simulations numériques
- **Homogénéisation du modèle aléatoire**
 - Présentation générale
 - Résultats théoriques
 - Validation numérique

Introduction – modélisation

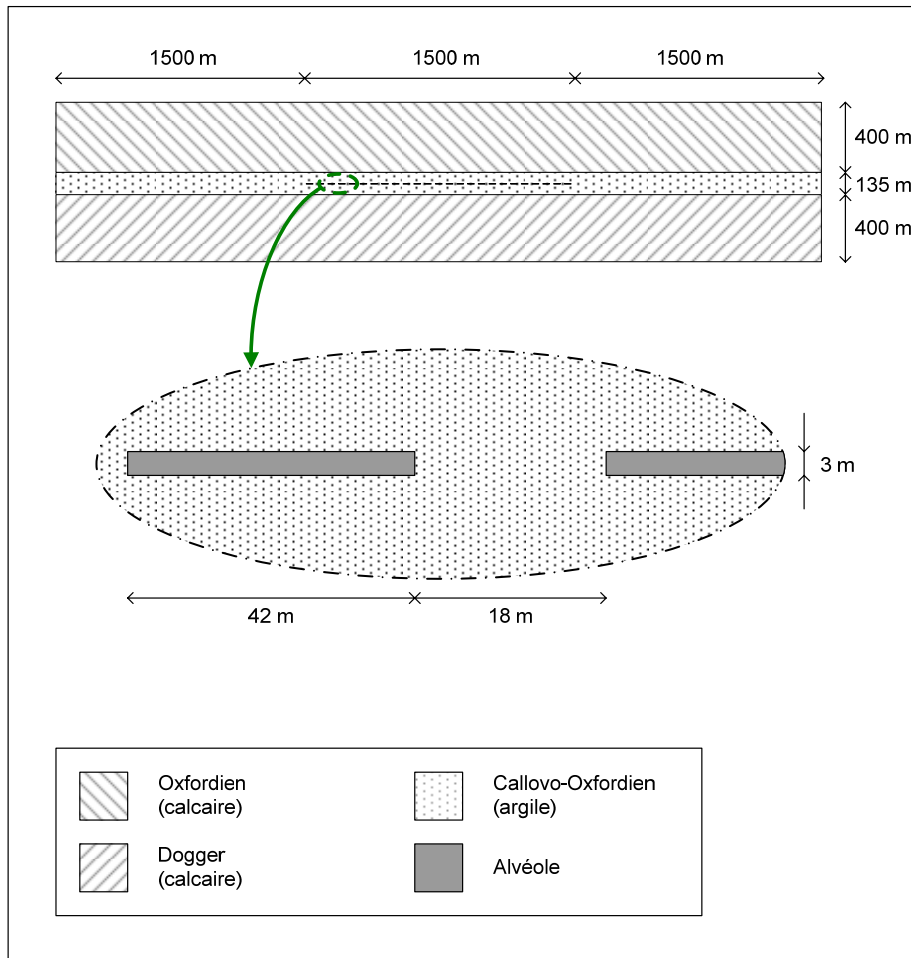
- Objectif : Valider (illustrer) les résultats de l'homogénéisation
 - Géométrie et équation simplifiées
 - ⇒ Approche valable (sauf mention contraire) dans des cas plus complexes et plus réalistes
 - Modélisation simplifiée de la migration de radionucléide en milieu poreux (1 phase saturée):

$$\omega_p R \frac{\partial C}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\overline{\overline{D}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(C) - \vec{V}C \right) + \omega_p R \lambda C = Q$$

$$\Rightarrow R \frac{\partial C}{\partial t} + L(C) + R \lambda C = Q$$

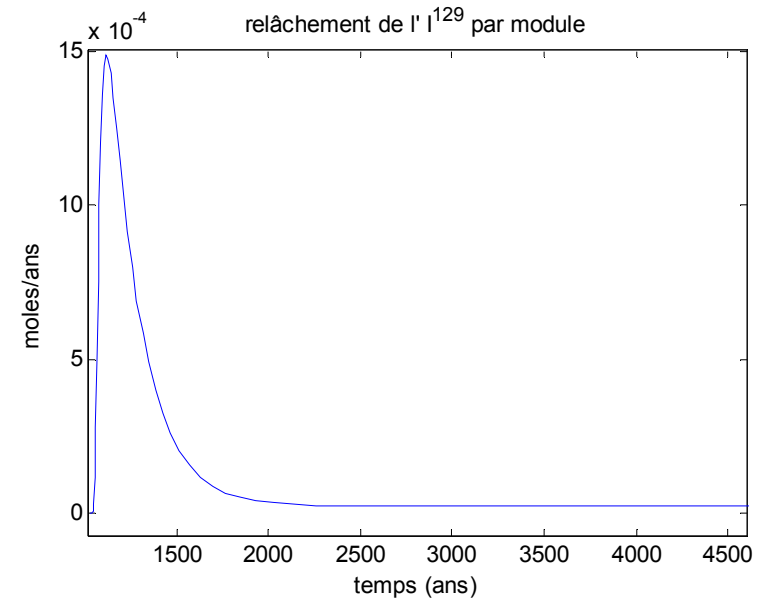
Introduction – modélisation

Une géométrie 2D simplifiée :



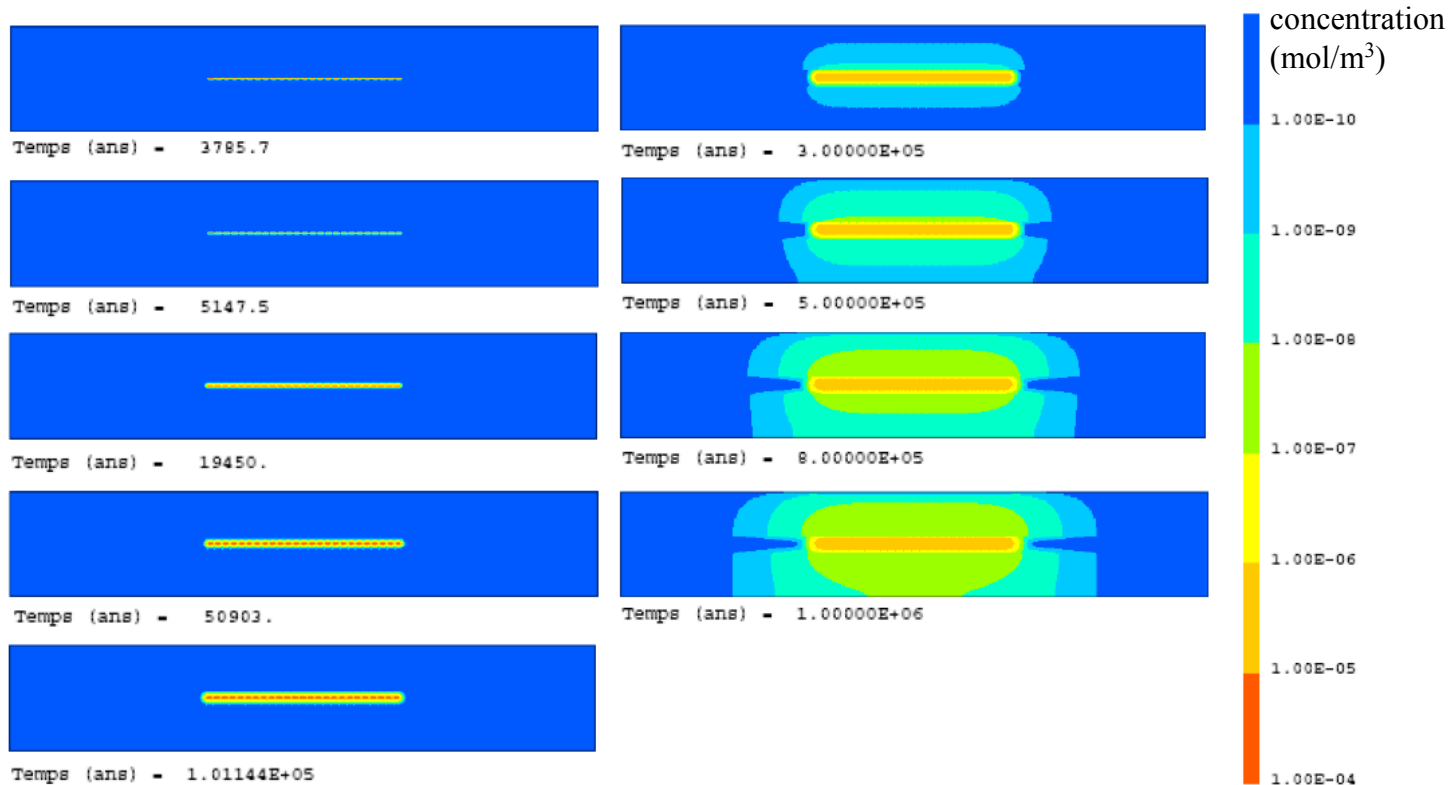
Caractéristiques de l' I^{129} :

- Période radioactive de l' I^{129} : $15 \cdot 10^6$ ans



Introduction – modélisation

- Un exemple de simulation :
 - rupture simultanée de tous les conteneurs
 - calculs effectués avec Castem (EFMH)



Introduction – aspect aléatoire

- Plusieurs sources d'incertitudes :
 - Caractéristiques physiques du milieu
 - Description exhaustive impossible
 - Comportement de fuite
 - Contenu des colis variable
 - Phénomène d'usure/rupture bien modélisé par un contexte aléatoire
- Prise en compte de l'aléa sur la fuite dans la modélisation

Introduction – aspect aléatoire

- Modèle probabiliste :

Aléa sur le terme source : $Q(\omega)$

⇒ la solution du problème devient aléatoire : $C(\omega)$

$$\omega_p R \frac{\partial C(\omega)}{\partial t} - L(C(\omega)) + \omega_p R \lambda C(\omega) = Q(\omega) \quad (P)$$

- On peut caractériser la solution à travers ses moments

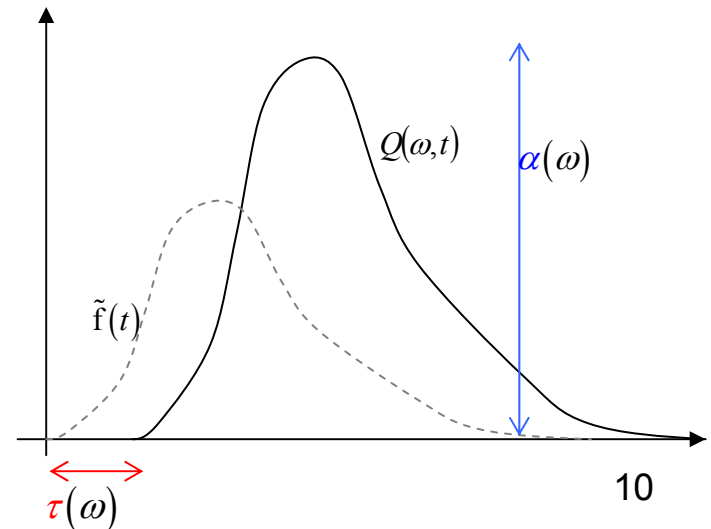
- **Introduction**
 - Modélisation de la migration de radionucléide
 - Vers un modèle probabiliste
- **Calcul des moments**
 - Comportement aléatoire des sources : un exemple
 - Définition et calcul des premiers moments
 - Simulations numériques
- **Homogénéisation du modèle aléatoire**
 - Présentation générale
 - Résultats théoriques
 - Validation numérique

Calcul des moments - un exemple

- Un cas particulier d'aléa sur les sources
Une courbe de relâchement typique, avec :
 - Aléa sur le temps de déclenchement
 - Aléa sur la quantité de matière relâchée
 - Indépendance entre tous les aléas

⇒ Terme source associé
à l'alvéole i :

$$Q_i(\omega, t) = \alpha_i(\omega) \tilde{f}(t - \tau_i(\omega))$$



Calcul des moments - un exemple

- Conséquence de la linéarité :
la solution $C(\omega, x, t)$ de (P) devient une superposition des $c_i(x, t)$ solutions de

$$\omega_p R \frac{\partial c_i}{\partial t} + L(c_i) + \omega_p R \lambda c_i = \tilde{f} \cdot \mathbb{1}_{B_i} \quad (P_i)$$

$$\Rightarrow C(\omega, x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\omega) c_i(t - \tau_i(\omega), x)$$

Calcul des moments

La linéarité et l'indépendance donnent l'espérance et la variance sous la forme:

$$* E[C(\cdot, x, t)] = \sum_{i=1}^N E[\alpha_i] E[c_i(t - \tau_i, x)]$$

$$* Var[C(\cdot, x, t)] = \sum_{i=1}^N E[\alpha_i^2] E[c_i(t - \tau_i, x)^2] - E[\alpha_i]^2 E[c_i(t - \tau_i, x)]^2$$

et si on connaît f_τ la densité de probabilité des décalages τ_i ,
par définition:

$$E[c_i(t - \tau_i, x)] = \int c_i(s, x) f_\tau(t - s) ds$$

$$E[c_i(t - \tau_i, x)^2] = \int c_i(s, x)^2 f_\tau(t - s) ds$$

Calcul des moments

De même, la corrélation entre différents temps et points de l'espace $Cor(X, Y) = E[X.Y]$ se calcule ainsi:

$$\begin{aligned} Cor\left(C(\cdot, x_1, t_1), C(\cdot, x_2, t_2)\right) &= \sum_{i=1}^N E\left[\alpha_i^2\right] E\left[c_i(t_1 - \tau_i, x_1) c_i(t_2 - \tau_i, x_2)\right] \\ &+ \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E\left[\alpha_i\right] E\left[\alpha_j\right] E\left[c_i(t_1 - \tau_i, x_1)\right] E\left[c_j(t_2 - \tau_j, x_2)\right] \end{aligned}$$

Avec par définition:

$$E\left[c_i(t_1 - \tau_i, x_1) c_i(t_2 - \tau_i, x_2)\right] = \int c_i(t_1 - s, x_1) c_i(t_2 - s, x_2) f_{\tau}(s) ds$$

Calcul des moments

Par définition, la covariance et le coefficient de corrélation se déduisent de l'espérance et de la corrélation par :

$$* \quad \boxed{Cov(X, Y) = Cor(X, Y) - E[X]E[Y]}$$

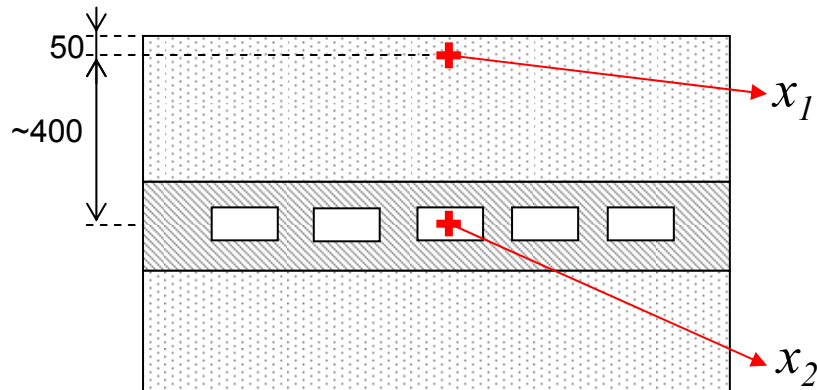
$$* \quad \boxed{\rho(C(\cdot, x_1, t), C(\cdot, x_2, s)) = \frac{Cov(C(\cdot, x_1, t), C(\cdot, x_2, s))}{\sqrt{Var[C(\cdot, x_1, t)]Var[C(\cdot, x_2, s)]}} = \rho^{1,2}(t, s)}$$

Calcul des moments

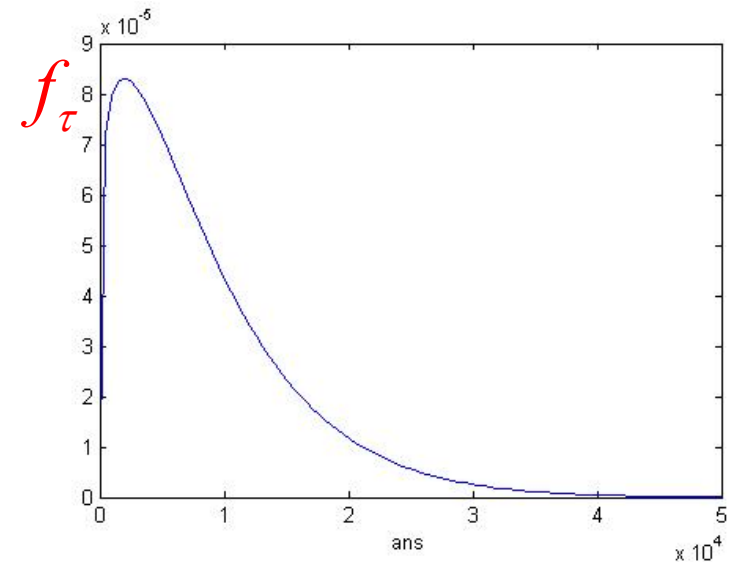
- Tous ces moments sont bien déterminés si on fixe $E[\alpha]$ et $\text{Var}[\alpha]$ finis et f_τ
- Leur calcul requiert la résolution de N (=nb de sources) problèmes similaires
 - ⇒ gains possibles dans la résolution numérique :
 - Construction d'une discrétisation commune
 - Préconditionnement des matrices
 - Résolution des systèmes linéaires

Calcul des moments - simulation numérique

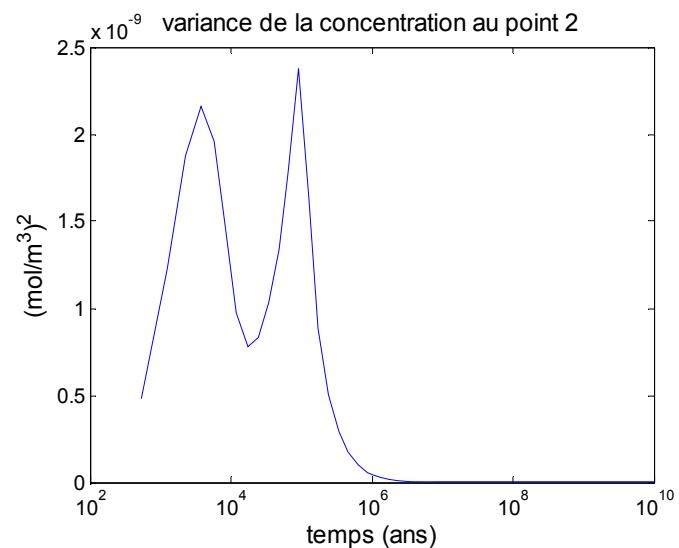
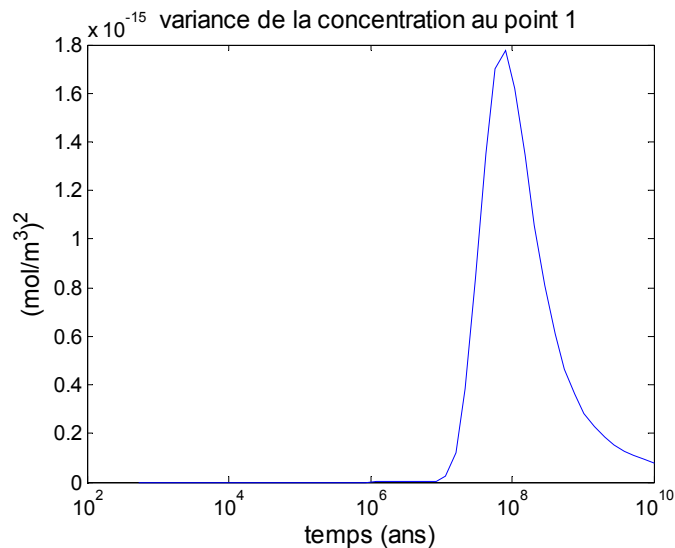
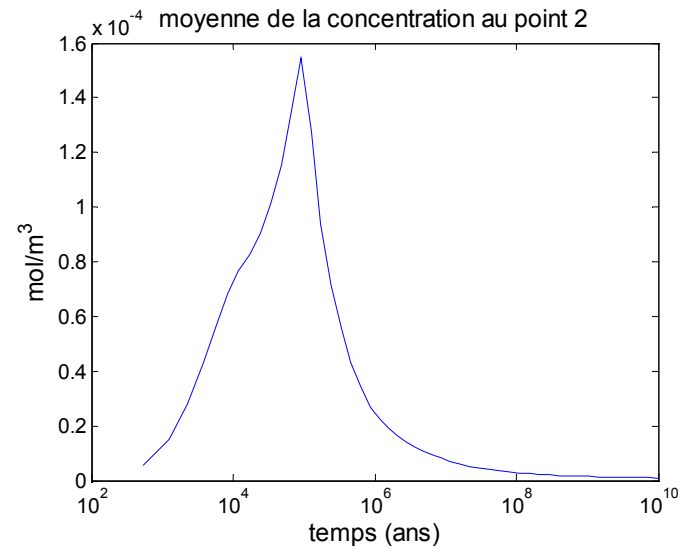
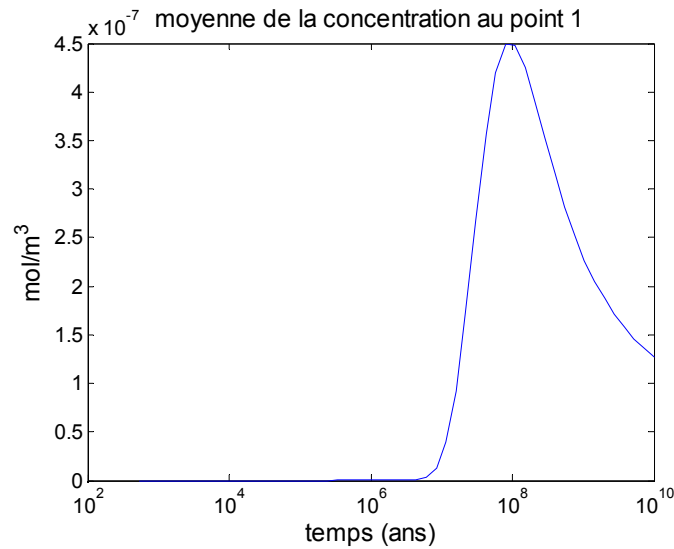
- Calcul des moments en tout temps (t,s) et en deux points (x_1, x_2) :



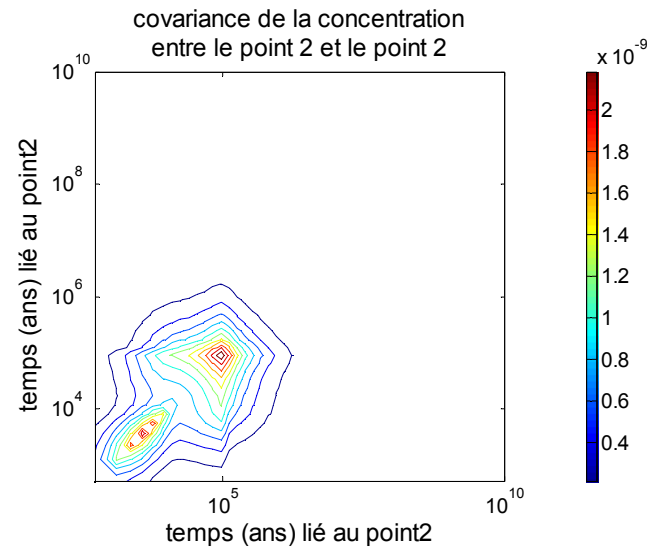
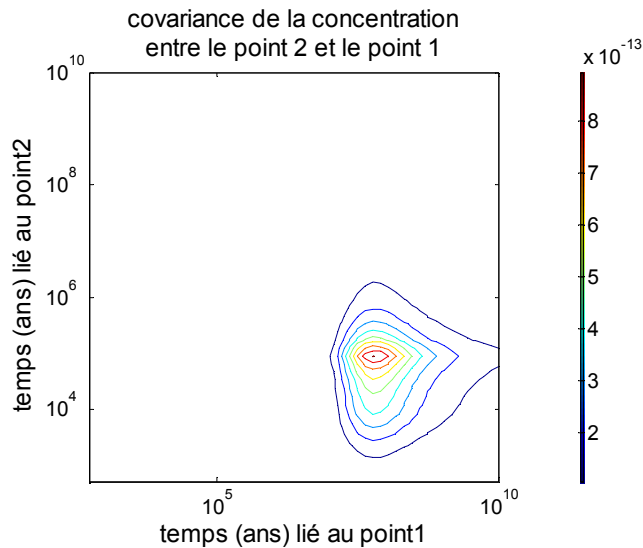
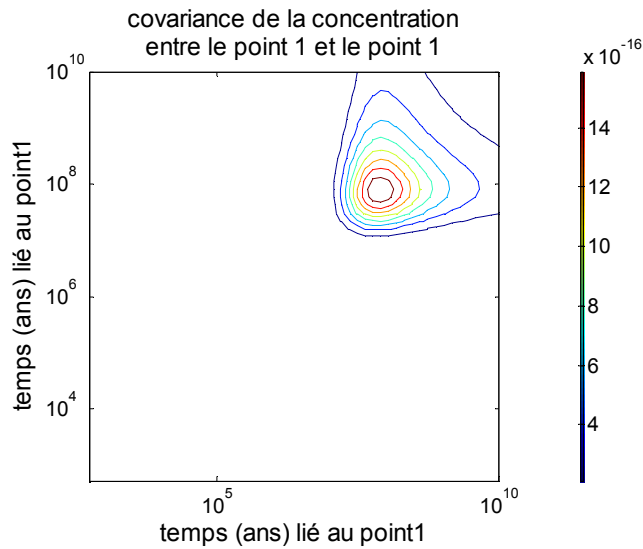
$$\begin{cases} N = 21 & E[\alpha_i] = 1 \\ & Var[\alpha_i] = 0.1 \end{cases}$$



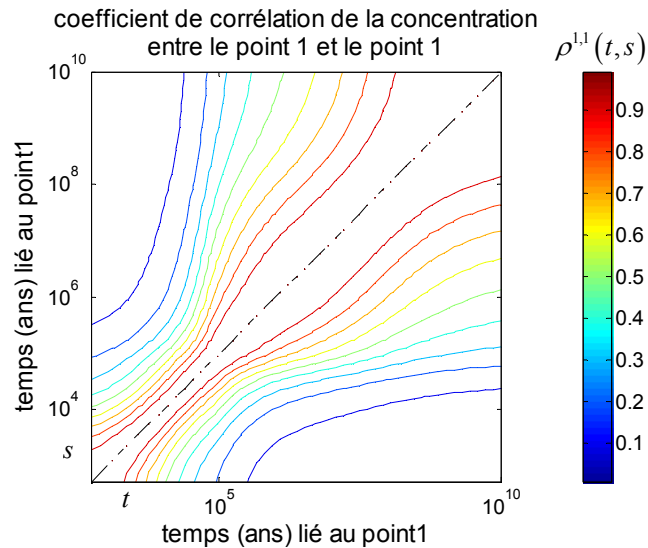
Calcul des moments – moyenne et variance



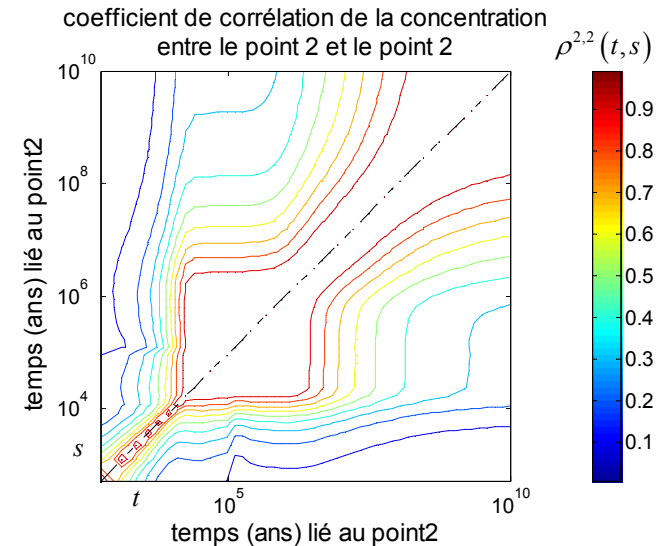
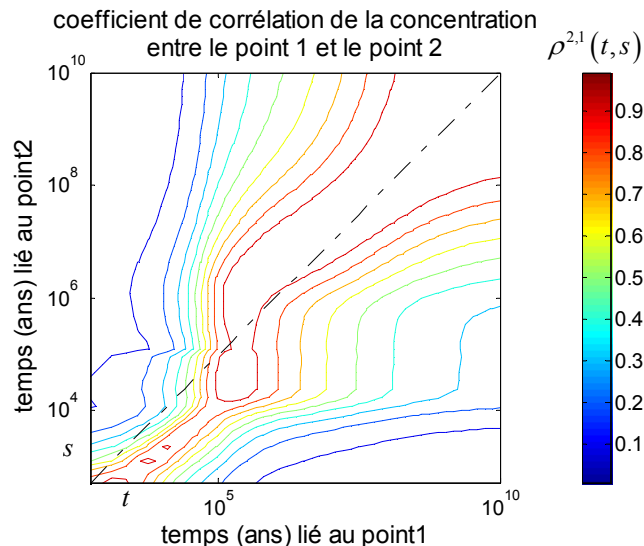
Calcul des moments – covariance



Calcul des moments – coefficient de corrélation



- $\rho \geq 0$: valeurs non corrélées
ou variant dans le même sens
- temps longs décorrélés des temps courts
- temps longs corrélés entre eux



- **Introduction**
 - Modélisation de la migration de radionucléide
 - Vers un modèle probabiliste
- **Calcul des moments**
 - Comportement aléatoire des sources : un exemple
 - Définition et calcul des premiers moments
 - Simulations numériques
- **Homogénéisation du modèle aléatoire**
 - Présentation générale
 - Résultats théoriques
 - Validation numérique

Homogénéisation – présentation

- Difficultés de la simulation numérique :
 - grand domaine (\sim km) / petits détails (sources \sim m)
 \Rightarrow maillage très lourd et calcul coûteux
- Une solution possible : l'homogénéisation
 - construction d'un modèle global macroscopique sur un domaine homogénéisé plus simple
 - approche adaptée à l'obtention d'un modèle champ lointain à partir des renseignements champs proche

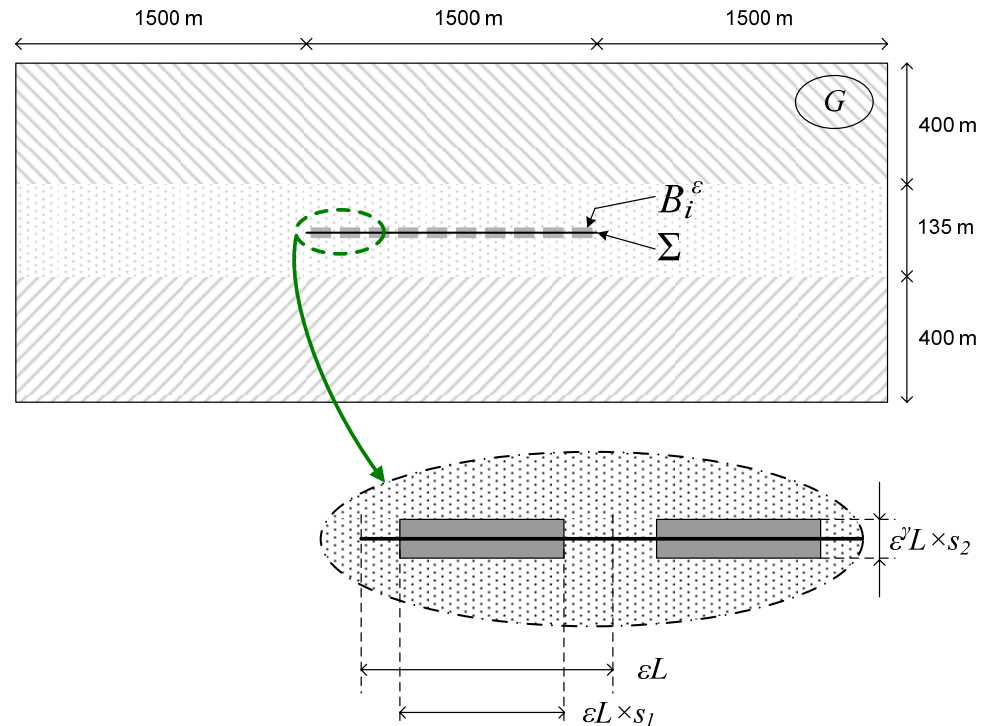
Homogénéisation – présentation

- Éléments de base :
 - Mise en évidence de deux échelles spatiales de taille (micro/macro)
 - Détermination d'un petit paramètre ε caractérisant le rapport entre les deux échelles
 - Périodicité sur l'échelle "microscopique"
(peut être relaxé)
- Le problème limite ($\varepsilon \rightarrow 0$) donne le modèle global (macroscopique)

Homogénéisation – présentation

- Cas du stockage :

- macro : site de stockage
- micro : alvéole
- petit paramètre : $\varepsilon = 1/N$
- périodicité horizontale
- apparition d'une source "homogène" de support singulier dans le modèle global



$$Q_i^\varepsilon(\omega, t) = \mathbb{1}_{B_i^\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} q(T_{x'/\varepsilon} \omega, t)$$

$T_{x'/\varepsilon} \omega$ processus stationnaire et ergodique

Homogénéisation – résultats théoriques

- On considère :

- u^ε solution aléatoire du problème détaillé

$$\omega_p R \frac{\partial u^\varepsilon(\omega)}{\partial t} + L(u^\varepsilon(\omega)) + \omega_p R \lambda u^\varepsilon(\omega) = \sum_{i=1}^N Q_i^\varepsilon(\omega) \quad \text{dans } G$$

- u^0 solution du problème homogénéisé

$$\omega_p R \frac{\partial u^0}{\partial t} + L(u^0) + \omega_p R \lambda u^0 = Q^0 \cdot \delta_\Sigma \quad \text{dans } G$$

$$\text{avec } Q^0(t) = s_1 s_2 E[q(\cdot, t)]$$

Homogénéisation – résultats théoriques

- On peut montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(0, \infty; H^1(G))} = 0 \quad \text{p.s.}$$

- On a donc convergence vers un problème:
 - déterministe
 - avec une géométrie homogène plus simple
 - avec une source homogène spatialement $\Rightarrow u^0$ est une approximation simple à calculer
- On complète ce résultat avec une estimation du taux de convergence

Homogénéisation – résultats théoriques

- Sous certaines hypothèses de mélange (+ que ergodicité), on peut montrer l'estimation d'erreur suivante :

$$E \left\| u^\varepsilon - u^0 \right\|_{L^2(0,T;H^1(G))}^2 \leq C \varepsilon^2$$

- Ceci permet d'estimer la qualité de l'approximation de u^ε faite par u^0

Homogénéisation – validation numérique

- On a :
$$E \left[\left\| u^\varepsilon - u^0 \right\|_{L^2(0,T;L^2(G))}^2 \right] = \underbrace{\int_0^T \int_G (u^0)^2 dx dt}_{I_1} - 2 \underbrace{\int_0^T \int_G E[u^\varepsilon u^0] dx dt}_{I_2} + \underbrace{\int_0^T \int_G E[(u^\varepsilon)^2] dx dt}_{I_3}.$$

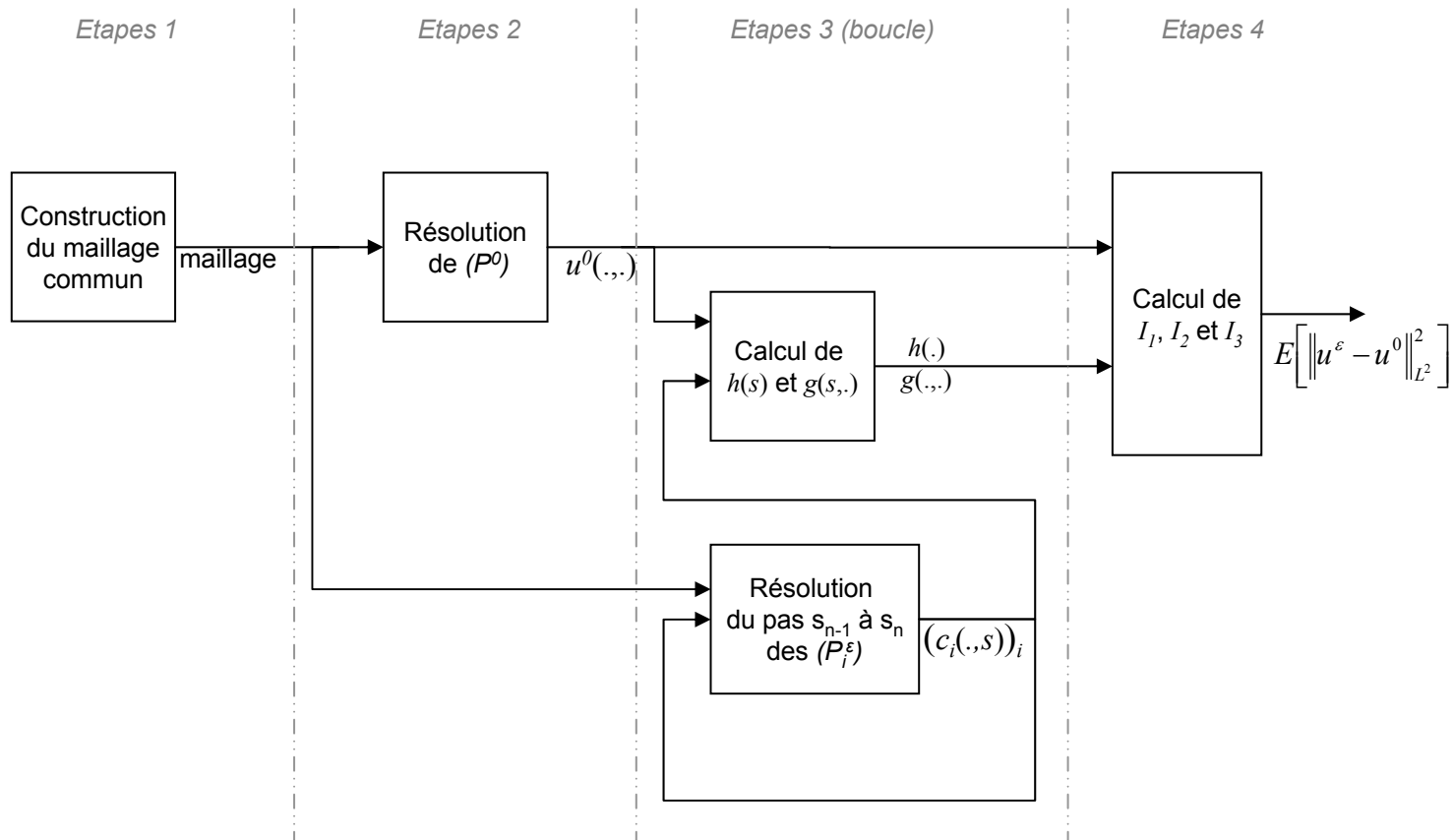
- Dans le cas où $u^\varepsilon(\omega, x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\omega) c_i(t - \tau_i(\omega), x)$,
on calcule que :

$$I_2 = \int_0^T \left(\int_0^T g(s, t) f_\tau(t - s) dt \right) ds \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^T h(s) F_\tau(s) ds$$

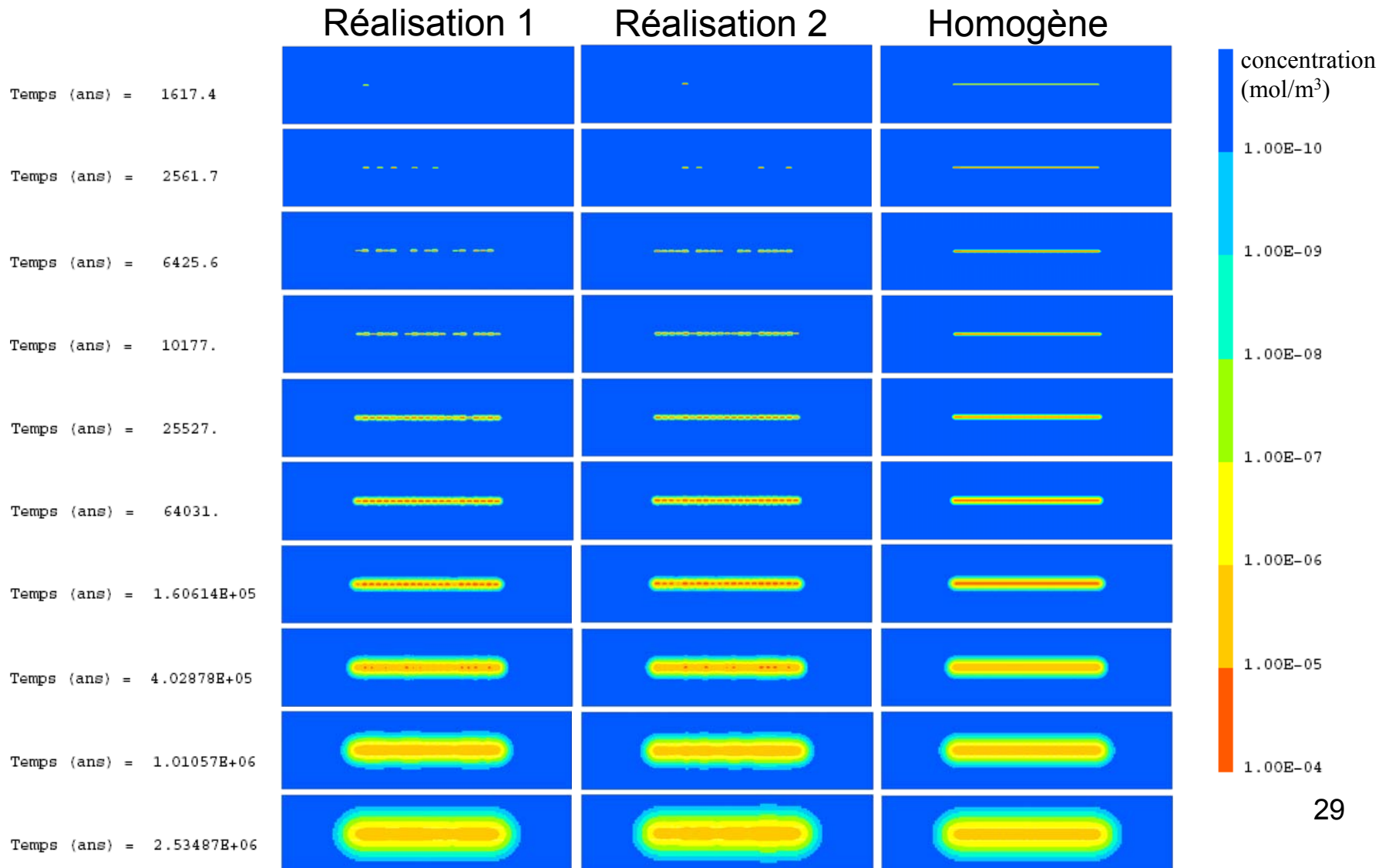
avec $g(s, t) = \sum_{i=1}^N E[\alpha_i] \int_G c_i(x, s) u^0(x, t) dx$ et $h(s) = \sum_{i=1}^N E[\alpha_i^2] \int_G c_i(x, s)^2 dx$

Homogénéisation – validation numérique

- Mise en œuvre du calcul

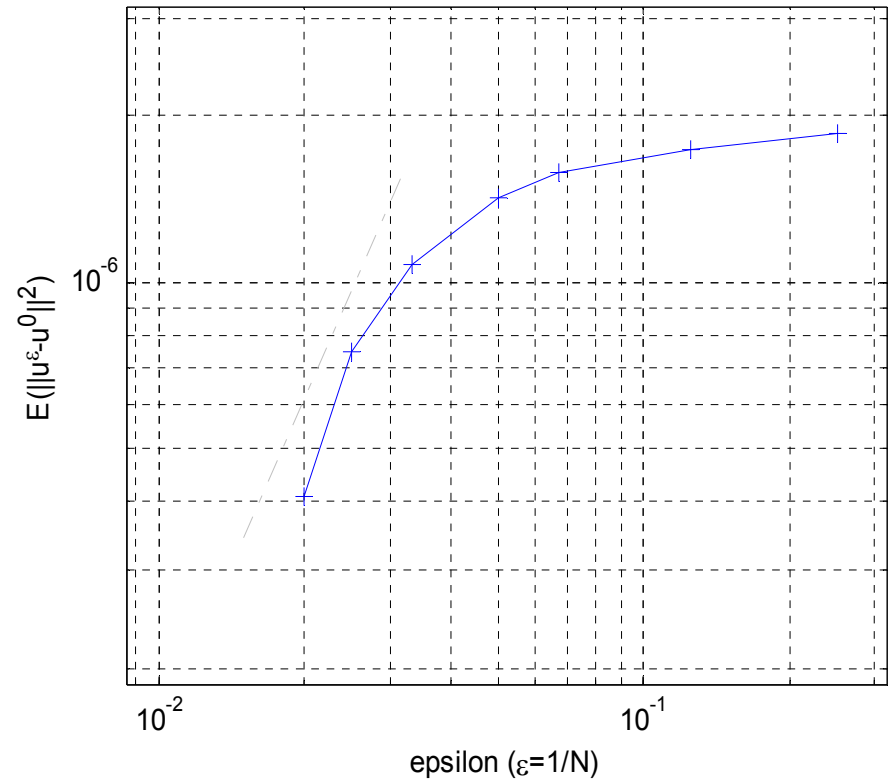
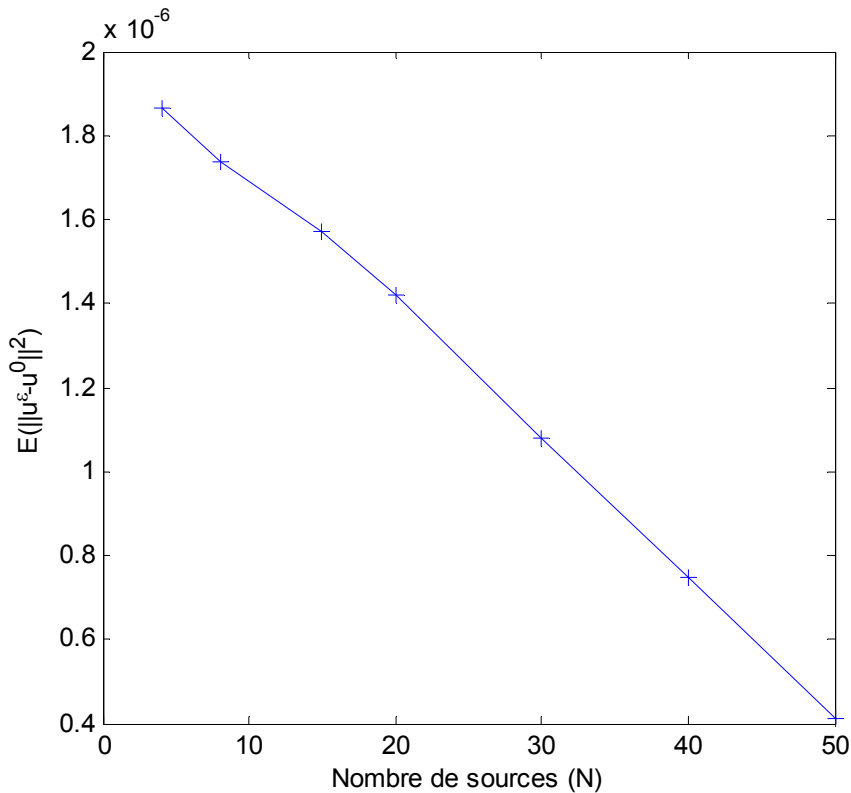


Homogénéisation – simulation numérique



Homogénéisation — validation numérique

- Résultats numériques



Conclusion

- Application des techniques d'homogénéisation au problème aléatoire
- Calcul des moments dans un cas particulier
- Validation numérique de la convergence
- Perspectives :
 - Résultats numériques du cas 3D
 - Modélisation plus réaliste de l'aléa
 - Application au cas non linéaire
 - Convergence en loi