

La factorisation de Smith

Application aux PMLs et aux Méthodes de décomposition de domaine

Frédéric NATAF,* Victorita DOLEAN,** Gerd RAPIN***

*Laboratoire J.L. Lions, UMR 7598 CNRS, **Université de Nice **Université de Göttingen

1 La factorisation de Smith

L'outil provient de la théorie des nombres et a été créé par H.J.S. Smith (1826–1883). Nous donnons ici sa forme polynomiale pour une matrice inversible.

Theorem 1 Soit n un entier et A une matrice inversible $n \times n$ à coefficients polynomiaux en la variable λ : $A = (a_{ij}(\lambda))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Alors, il existe trois matrices à coefficients polynomiaux E , D et F tels que

- $\det(E)$ et $\det(F)$ sont des réels (ainsi, E^{-1} et F^{-1} sont des polynômes)
- D est une matrice diagonale
- $A = EDF$.

De plus, D est unique à une permutation et à une multiplication par une constante près.

Calcul d'une factorisation de Smith: La matrice diagonale D est donnée par la formule définie ci-dessous. Soit $1 \leq k \leq n$,

- S_k est l'ensemble de toutes les sous-matrices carrées $k \times k$ extraites de A .
- $Det_k = \{\text{Det}(B_k) \mid B_k \in S_k\}$
- LD_k est le PGCD de l'ensemble de polynômes Det_k .

Alors,

$$D_{kk}(\lambda) = \frac{LD_k(\lambda)}{LD_{k-1}(\lambda)}, 1 \leq k \leq n$$

(par convention, $LD_0 = 1$).

- La factorisation peut être calculée à la main. Le calcul présente de fortes analogies avec la factorisation de Gauss.
- La commande Maple smith

Exemple d'application: Fonctions de courant via Smith Considérons le système de Stokes 2D:

$$\begin{pmatrix} -\nu\Delta & 0 & \partial_x \\ 0 & -\nu\Delta & \partial_y \\ \partial_x & \partial_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On privilégie la direction x .

On effectue la factorisation du système de Stokes (\mathcal{A}_{Stokes}) en le considérant comme une matrice à coefficients polynomiaux en ∂_x entries. Les coefficients des polynômes sont des opérateurs pseudo-différentiels dans la direction y .

De manière similaire, on peut prendre la transformée de Fourier en y

$$\hat{\mathcal{A}}_{Stokes} := \begin{pmatrix} -\nu(\partial_{xx} - k^2) & 0 & \partial_x \\ 0 & -\nu(\partial_{xx} - k^2) & ik \\ \partial_x & ik & 0 \end{pmatrix}.$$

et appliquer la factorisation de Smith à la matrice ci-dessus. On obtient

$$\mathcal{A}_{Stokes} = EDF \quad (1)$$

où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\Delta^2 \end{pmatrix}$$

Une formulation fonction de courant donne la même équation ($-\nu\Delta^2$) pour la fonction de courant.

De la même manière, le cas **tri-dimensionnel** peut être caractérisé. La matrice diagonale D_{3D} est une matrice 4×4 dont les coefficients sont: $D_{3D,11} = D_{3D,22} = 1$, $D_{3D,33} = -\nu\Delta$ et $D_{3D,44} = -\nu\Delta^2$. On a **deux équations scalaires**.

En quelque sorte, ceci est consistant avec le fait bien connu qu'en 2D une formulation scalaire est possible alors qu'en 3D on a seulement des formulations vectorielles.

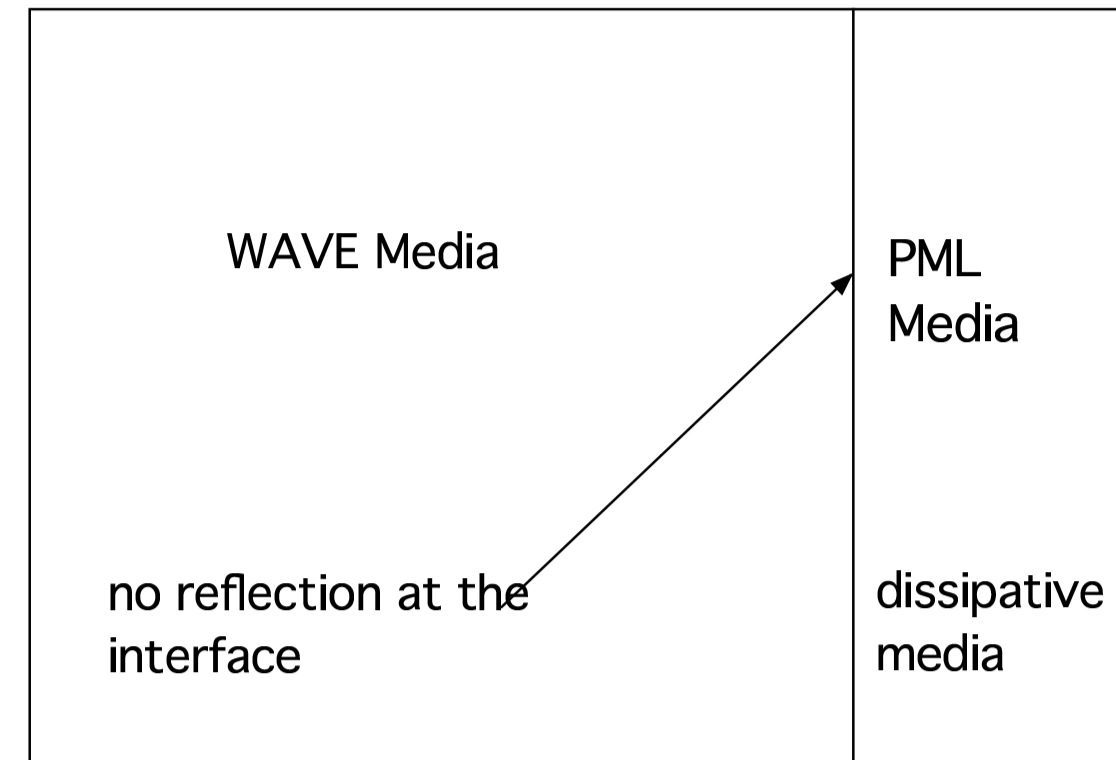
La factorisation de Smith donne une vision intrinsèque des systèmes d'EDP qui permet de considérer deux problèmes:

1. Couches parfaitement adaptées (PML) pour les équations d'Euler compressibles.
2. Méthodes de décomposition de domaine pour Euler compressible, Stokes, Oseen, ...

2 Couches parfaitement adaptées

Une couche PML (Berenger, 94) :

- est dissipative
- ne crée aucune réflexion à l'interface avec le domaine propagatif.



Pour l'équation des ondes, le milieu PML est défini par un changement de coordonnées dans le plan complexe de telle sorte que:

$$\mathcal{L}_{pml} = \partial_{tt} - c^2 \partial_{yy} - c^2 (\partial_x^{pml})^2$$

où

$$\partial_x^{pml} := \frac{i\omega}{i\omega + c\sigma} \partial_x$$

et σ est un coefficient d'atténuation, ω est la variable duale de Fourier pour le temps. L'opérateur a une implémentation simple: $\partial_x^{pml}(u) = \phi$ où $\phi_t + c\sigma\phi = u_{tx}$

2.1 PML pour les équations d'Euler compressibles

Les équations d'Euler linéarisées autour d'un état constant s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} \partial_t + \bar{u}\partial_x + \bar{v}\partial_y & \bar{\rho}c^2\partial_x & \bar{\rho}c^2\partial_y \\ \frac{1}{\bar{\rho}}\partial_x & \partial_t + \bar{u}\partial_x + \bar{v}\partial_y & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}}\partial_y & 0 & \partial_t + \bar{u}\partial_x + \bar{v}\partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_p \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

La factorisation de Smith donne: $D_{11} = D_{22} = 1$ et $D_{33} = \mathcal{L}\mathcal{G}$ où

$$\mathcal{G} = \partial_t + \bar{u}\partial_x + \bar{v}\partial_y$$

est un opérateur de transport d'ordre un et

$$\mathcal{L} = \partial_{tt} + 2\bar{u}\bar{v}\partial_{xy} + 2\partial_t(\bar{u}\partial_x + \bar{v}\partial_y) - (\bar{c}^2 - \bar{v}^2)\partial_{yy} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)\partial_{xx}$$

est l'opérateur des ondes advectives.

Le principe de la PML est que seul l'opérateur des ondes advectives nécessite une procédure de PML"isation"

Premier modèle PML On remplace \mathcal{L} par son "pmlisé" \mathcal{L}^{pml} dans la matrice D . Dans les matrices E et F et dans l'opérateur \mathcal{G} , les dérivées en x ne sont pas modifiées. Ne modifier que l'opérateur des ondes advectives évite les problèmes d'instabilité avec les ondes tourbillonnaires. On définit donc

$$A_{Euler}^{pml1} = ED^{pml1}F \quad (2)$$

où

$$D^{pml} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G}\mathcal{L}^{pml} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Tous calculs faits, ce modèle s'avère trop complexe à implémenter.

Un second modèle PML Le principe de ce modèle est que la pression p vérifie une équation des ondes advectives qui est la seule équation qui exige une PML. En effet, en appliquant au système d'Euler la matrice El ,

$$El = \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\bar{\rho}c^2\partial_x & -\bar{\rho}c^2\partial_y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$El A_{Euler} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}}\partial_x & \mathcal{G} & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}}\partial_y & 0 & \mathcal{G} \end{pmatrix} \quad (4)$$

On remplace \mathcal{L} par \mathcal{L}^{pml} et on applique El^{-1} Un calcul direct donne:

$$A_{Euler}^{pml2} = A_{Euler} + \begin{pmatrix} (\mathcal{L}^{pml} - \mathcal{L})\mathcal{G}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

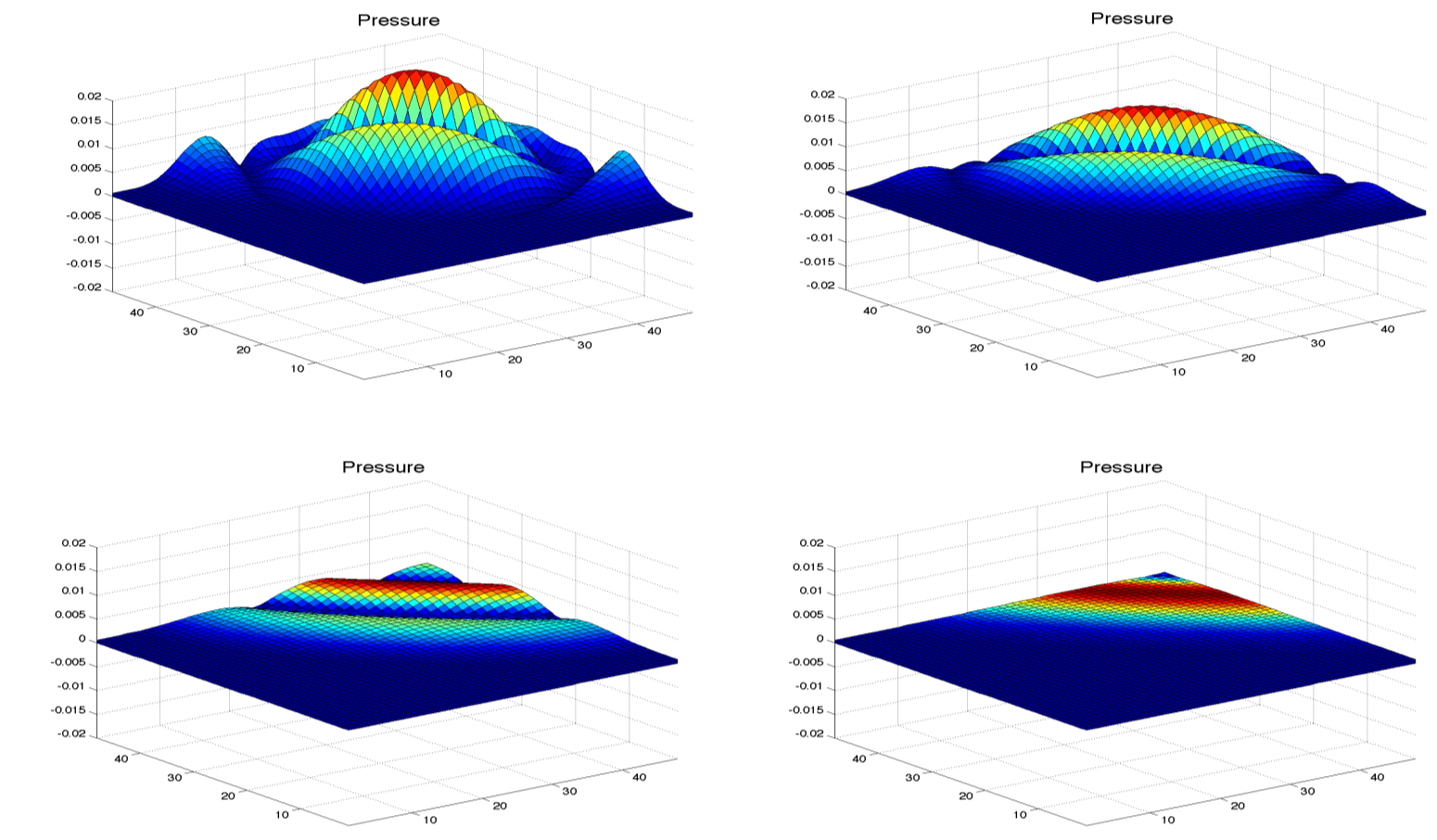
On peut se débarrasser de l'opérateur \mathcal{G}^{-1} , on introduit une nouvelle variable \mathcal{P} telle que $\mathcal{G}(\mathcal{P}) = p$ de telle sorte que le système PML étendu s'écrit

$$A_{Euler}^{pml2} \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ p \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -1 & 0 & 0 \\ \mathcal{L}^{pml} - \mathcal{L} & \mathcal{G} & \bar{\rho}c^2\partial_x & \bar{\rho}c^2\partial_y \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho}}\partial_x & \mathcal{G} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\rho}}\partial_y & 0 & \mathcal{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ p \\ u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

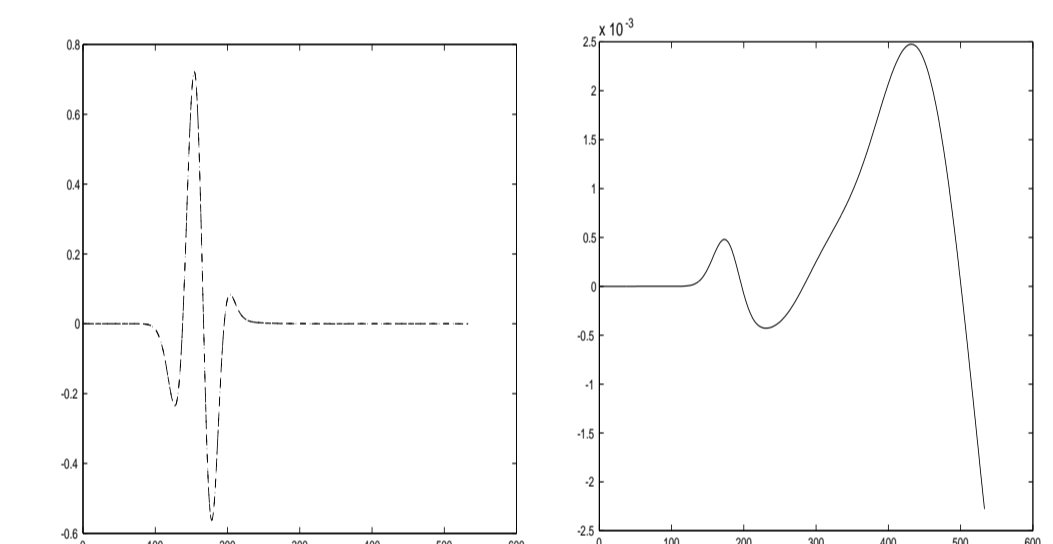
avec les conditions d'interface suivantes entre le domaine Euler et la PML $\mathcal{P} = 0$, p et u sont continus, $\partial_x(p_{Euler}) = \partial_x^{pml}(p_{pml})$

Une analyse en ondes planes montre que la PML est dissipative et qu'il n'y pas de réflexion à l'interface entre le domaine Euler et la PML. Les deux modèles s'étendent au cas tridimensionnel.

Résultats numériques pour le second modèle PML Schéma 2D sur grille décalée, coefficients constants



Pression – vitesse oblique $M = 0.9$ à des instant successifs



Pression (gauche) et erreur sur la pression (droite) près du coin supérieur droit pour un écoulement horizontal $M = 0.33$ vs. pas de temps

La stabilité a été testée en calculant sur des intervalles de temps bien plus longs que ceux utilisés pour générer les figures.

Le cas tridimensionnel se traite de manière similaire pour les deux modèles proposés.

3 Méthodes de décomposition de domaines

L'algorithme classique de Neumann-Neumann pour le système de Stokes n'est pas optimal. En utilisant, la factorisation de Smith, il est possible de le rendre optimal.

Dans l'algorithme classique, on résout à chaque étape et dans chaque sous-domaine un problème à **déplacement imposé** puis un problème à **contrainte imposée**. L'étude de cet algorithme via la factorisation de Smith montre qu'il n'est pas optimal et que l'on peut le rendre optimal en modifiant les conditions aux limites utilisées. Dans le nouvel algorithme, on résout à chaque étape et dans chaque sous-domaine un problème à **contrainte normale et vitesse tangentielle imposées** puis un problème à **contrainte tangentielle et vitesse normale imposées**.

B	new alg	N-N	c	new alg	N-N
1	3	11	0.001	3	11
2	3	12	0.01	3	16
3	3	11	0.1	3	19
5	3	15	1	3	19
10	3	-	10	3	16
20	7	-	100	3	10

Comparison entre le nouvel algorithme et l'algorithme classique (N-N): Nombre d'itérations pour différents rapports d'aspect entre les sous-domaines (gauche) et différents termes de réaction (droite)