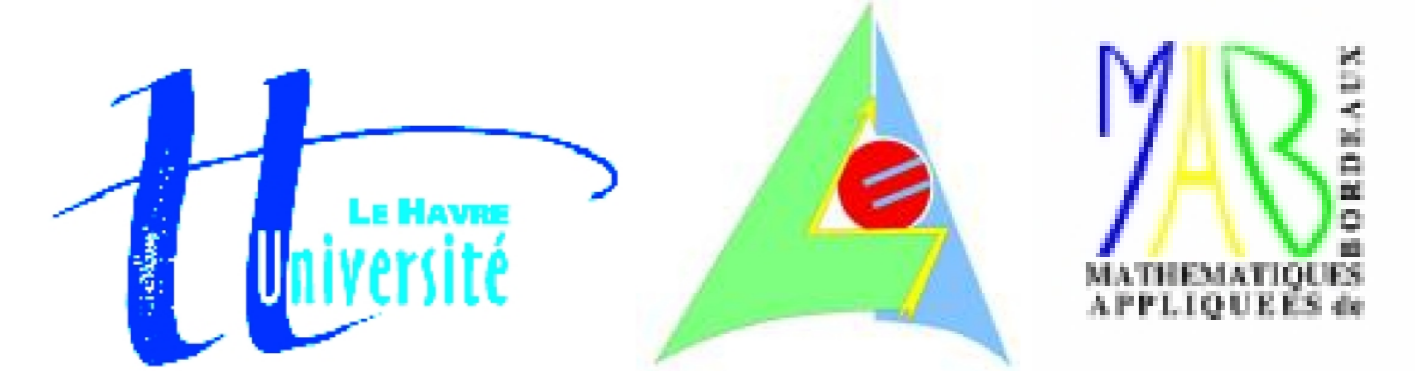


# Modélisation particulière des transferts en milieux poreux

Anthony Beaudoin<sup>1</sup>, Serge Huberson<sup>2</sup>, Iraj Mortazavi<sup>3</sup>, Elie Rivoalen<sup>1</sup>

1 : LMPG, Université du Havre,  
2 : LEA, Université de Poitiers,  
3 : MAB, Université de Bordeaux 1



## Résumé

La modélisation particulière des transferts en milieux poreux apporte une solution à plusieurs problèmes. Elle permet la simulation des phénomènes de diffusion sans introduire de viscosité numérique d'aucune sorte, elle permet la modélisation de frontière solides de forme complexe car elle ne nécessite qu'un maillage de surface, enfin sa forme lagrangienne permet le recours à des modélisation nouvelle, en particulier grâce à l'utilisation d'équation de Langevin permettant de tenir compte du caractère incertain des données sur les propriétés physiques des milieux poreux naturels. Ces trois aspects sont développés successivement.

## La méthode particulière

- Discrétisation en coordonnées lagrangienne

$$\frac{\partial \chi(\mathbf{x}_o, t_o; t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\chi(\mathbf{x}_o, t_o; t), t)$$

- Approximation intégrale des opérateurs différentiels
- Transport stable, même pour une solution discontinue
- Perturbation locale : méthode auto(?) adaptative
- Maillage réduit à un maillage de peau (pas de maillage dans le volume)

Transferts en milieux poreux  $\rightarrow$  équation de convection-diffusion

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{grad}(\mathbf{u}c) = \text{div}(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{grad}c)$$

Discrétisation par la méthode particulière, définition des particules :

$$\mathbf{X}_i = \int_{P_i} \mathbf{x} dv / |P_i|, \quad C_i = \int_{P_i} c(\mathbf{x}, t) dv$$

Equations discrétisées :

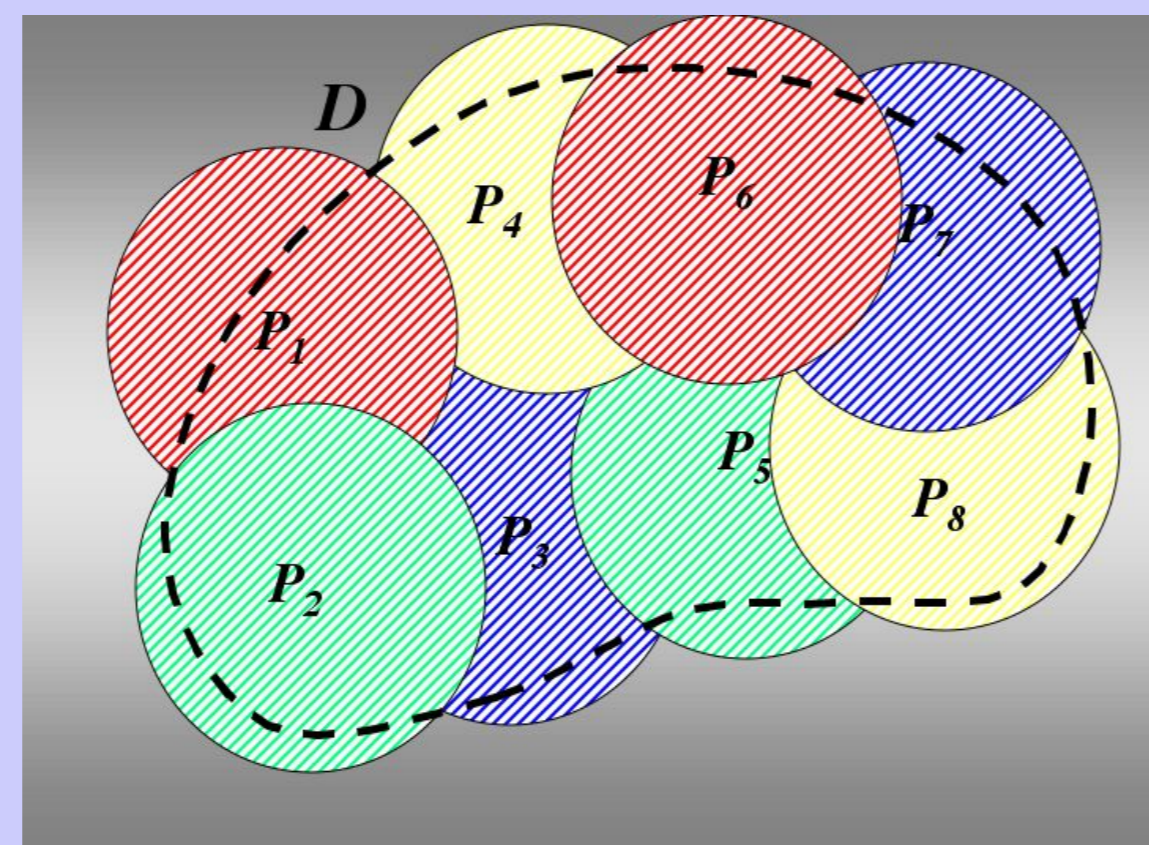
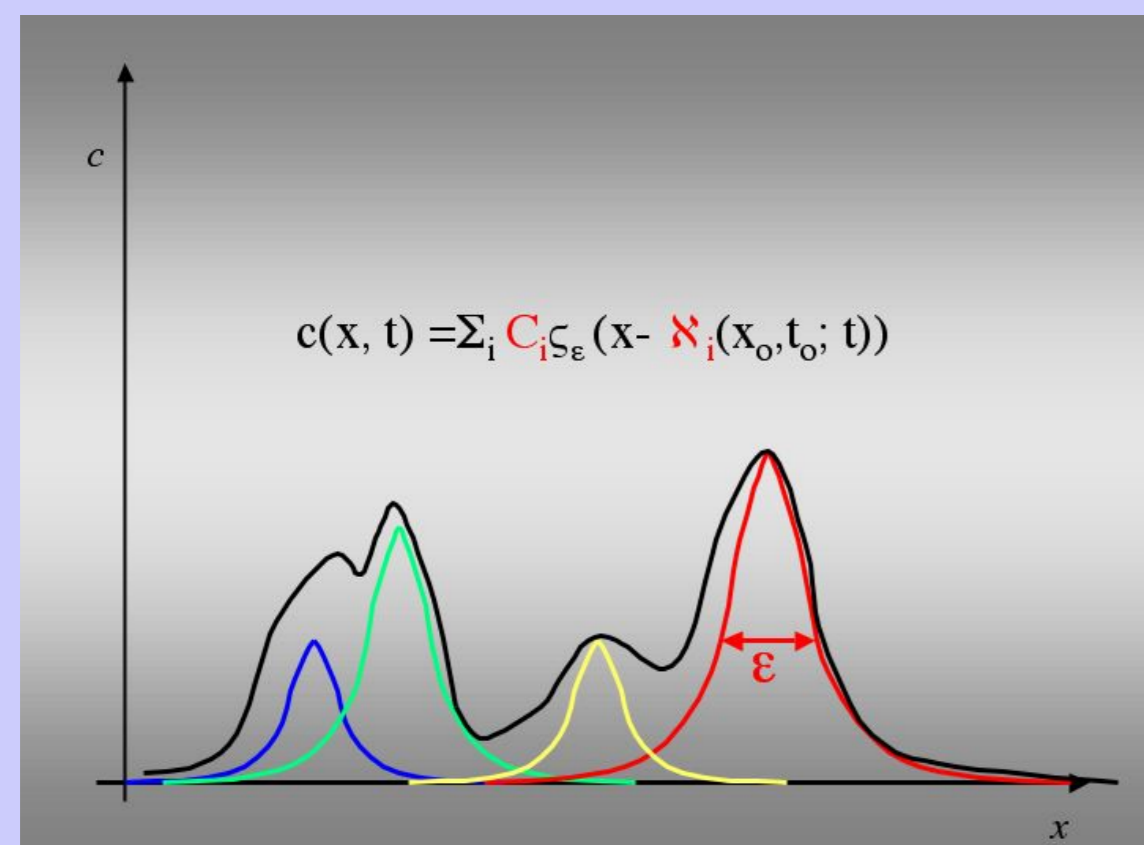
$$\frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{X}_i, t)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \int_{P_i} \text{div}(\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{grad}c) dv$$

Approximation de  $c(\mathbf{x}, t)$  :

$$c_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^I C_i \zeta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i)$$

où  $\zeta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i)$  est une approximation "régulière" de la mesure de Dirac en  $\mathbf{X}_i$  et  $\varepsilon$  est un paramètre caractérisant le diamètre de la particule



Représentation d'une fonction par des particules : à gauche concentration résultante, à droite recouvrement du support

## Application 1 : Simulation d'un processus de diffusion non isotrope

**Objectif :** La simulation par méthode particulière d'un processus de diffusion anisotrope peut être réalisée par la méthode "Particle Strength Exchange" au prix d'une complication importante. Notre objectif est de construire une méthode plus facile à utiliser sans perdre les avantages de la méthode particulière.

**Méthode :** alternative : utilisation de la vitesse de diffusion.

$$\frac{dC_i}{dt} = \int_{P_i} \text{div} \left( \frac{\bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{grad}(c(\mathbf{x}, t))}{c(\mathbf{x}, t)} \right) dv = \int_{P_i} \text{div}(-\mathbf{U}_D c(\mathbf{x}, t)) dv$$

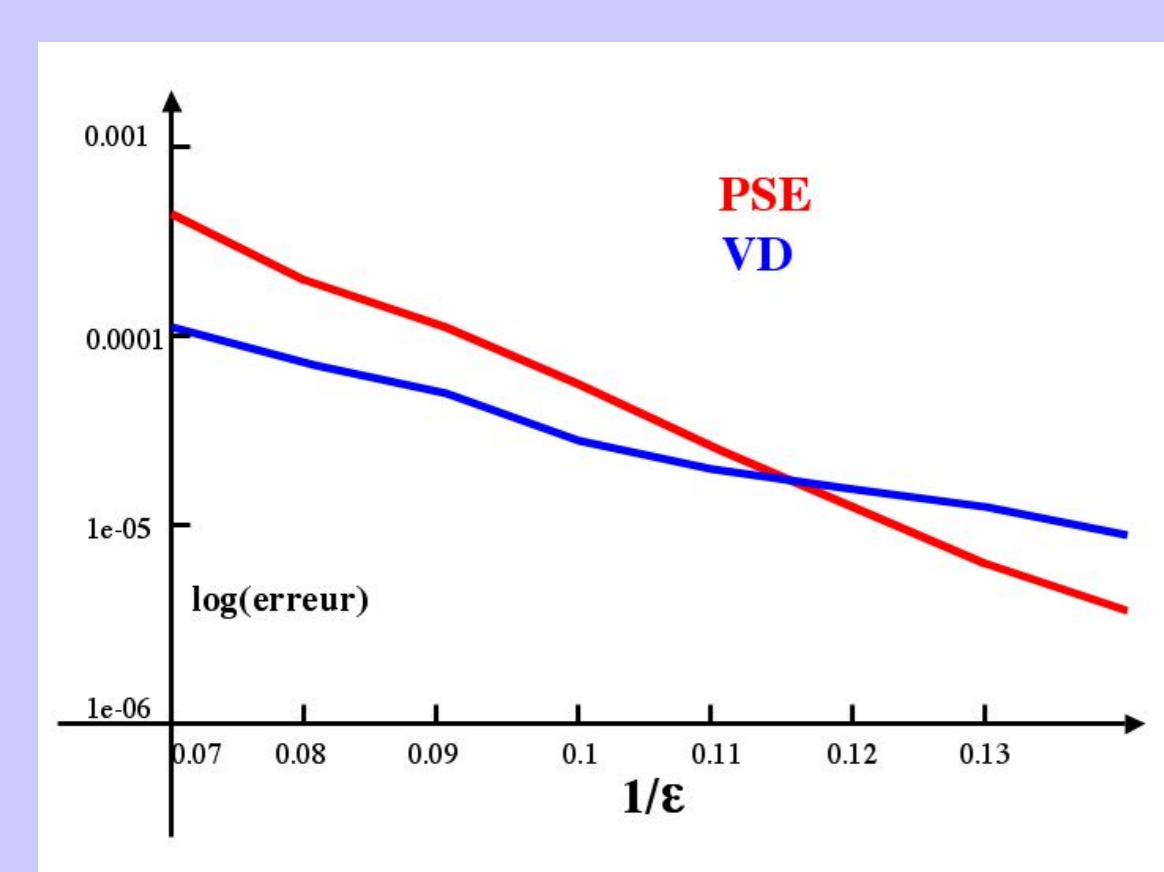
$-\mathbf{U}_D$  : Vitesse de diffusion

Equations discrétisées :

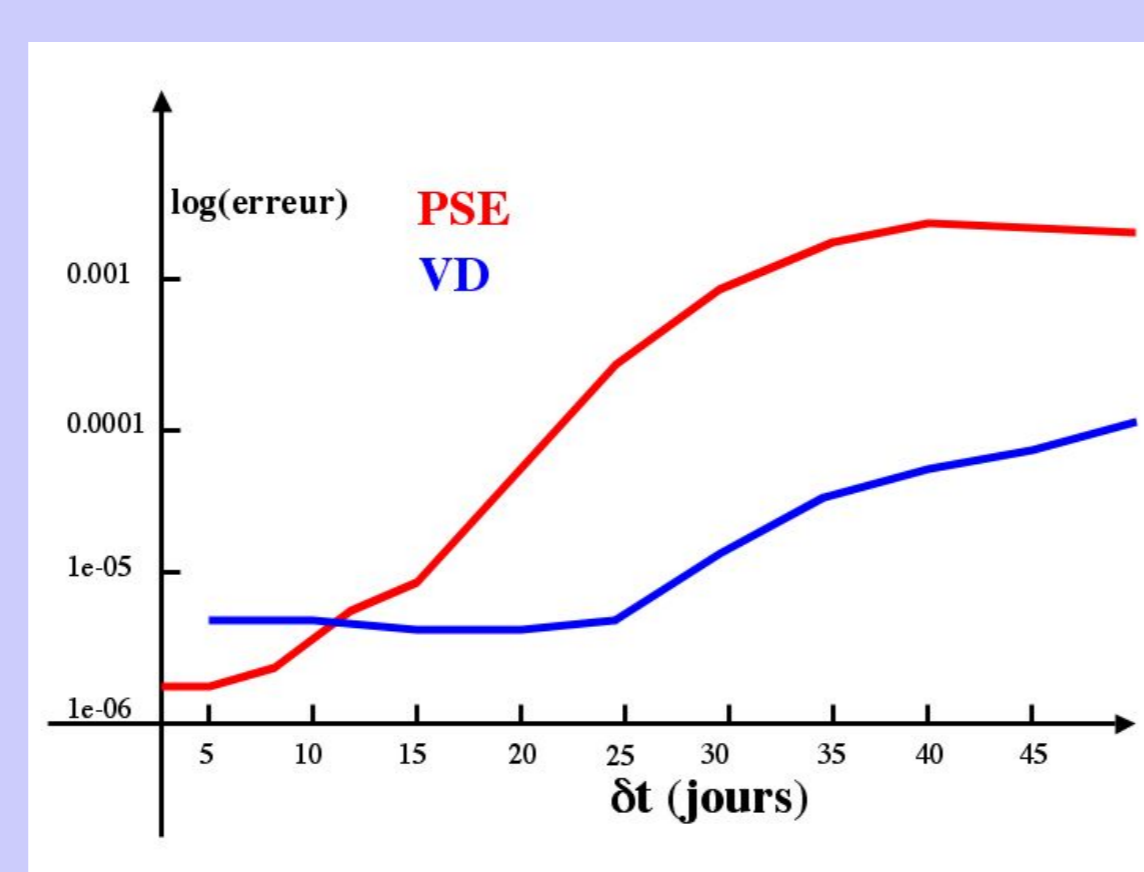
$$\frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = (\mathbf{U}(\mathbf{X}_i, t) - \mathbf{U}_D(\mathbf{x}, t))$$

$$\frac{dC_i}{dt} = 0$$

Comparaison avec la méthode PSE (Particle Strength Exchange : approximation intégrale de l'opérateur de diffusion)



effet du paramètre de régularisation



effet du pas de temps

## Application 2 : Etude de l'écoulement local

**Objectif :** Pour étudier les effets d'inertie à l'échelle du grain dans un milieu poreux, nous voulons construire une méthode numérique de résolution des équations de Navier Stokes permettant d'obtenir un écoulement de Stokes lorsque le nombre de Reynolds tend vers zéro. De plus, nous utilisons une discrétisation particulière pour représenter facilement les formes des grains.

**Méthode :** La principale difficulté est la vérification des conditions aux limites.

- Pour résoudre correctement les systèmes de Stokes, nous utilisons la formulation intégrale du problème de Stokes instationnaire selon la formulation APS (Achdou, Pironneau, Salvi).
- Pour bien représenter la couche limite, nous utilisons des particules dont la forme varie au voisinage des parois, allant de la sphère au loin à la nappe au près.

Près des parois :

- le problème est écrit en formulation "fonction de courant et décomposé en deux parties :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{2}{Re} \Delta^2 \psi = \text{div}((\mathbf{rot} \psi) \times \Delta \psi) \implies \left( \frac{2\delta t}{Re} \Delta^2 - \Delta \right) \psi^{n+1} = f(\psi^n)$$

cette dernière équation est transformée en une intégrale de frontière permettant de vérifier simultanément les conditions aux limites sur les deux composantes de la vitesse :

$$\psi^{n+1}(\mathbf{x}) = \eta \int_{\partial D} \left( q_2(\mathbf{x}') \mathcal{N}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - q_1(\mathbf{x}') \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}' - \int_D \omega^n(\mathbf{x}') \mathcal{N}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

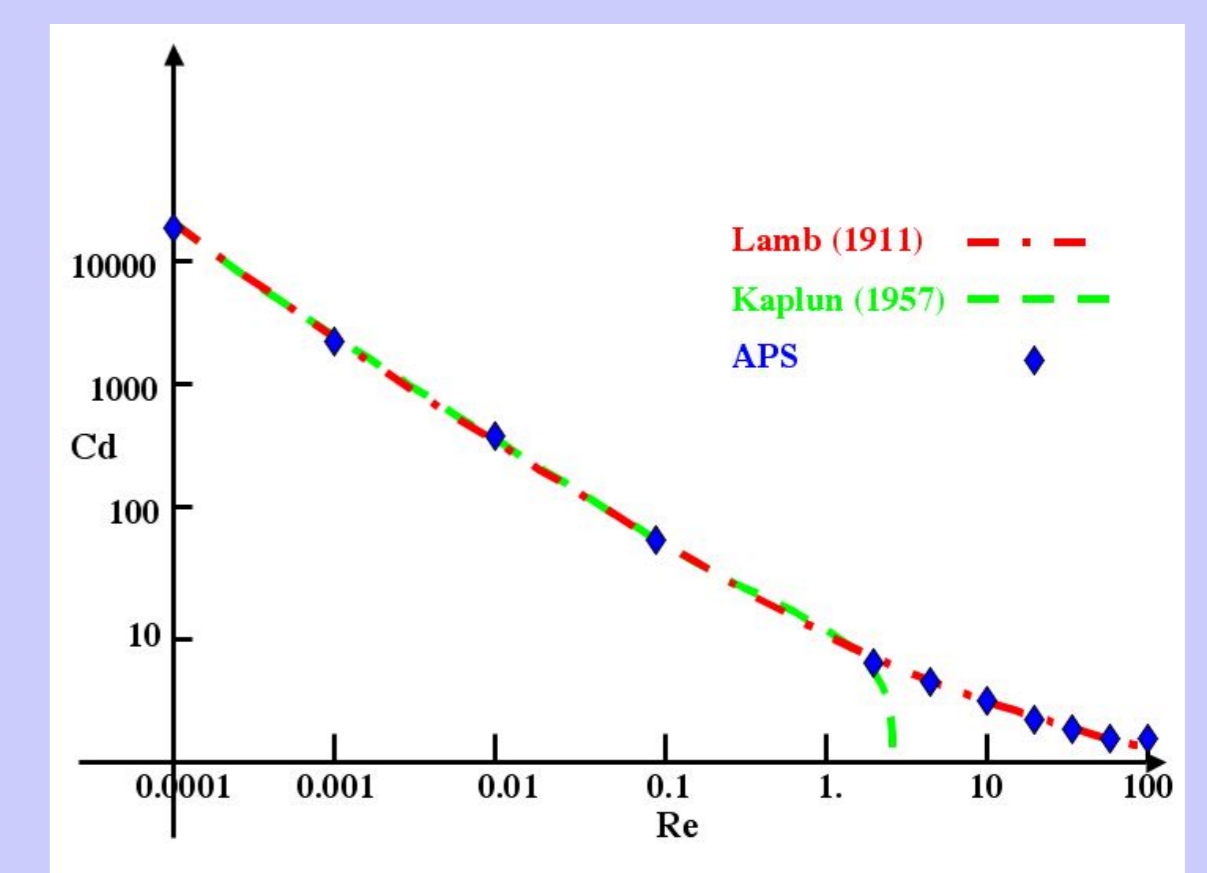
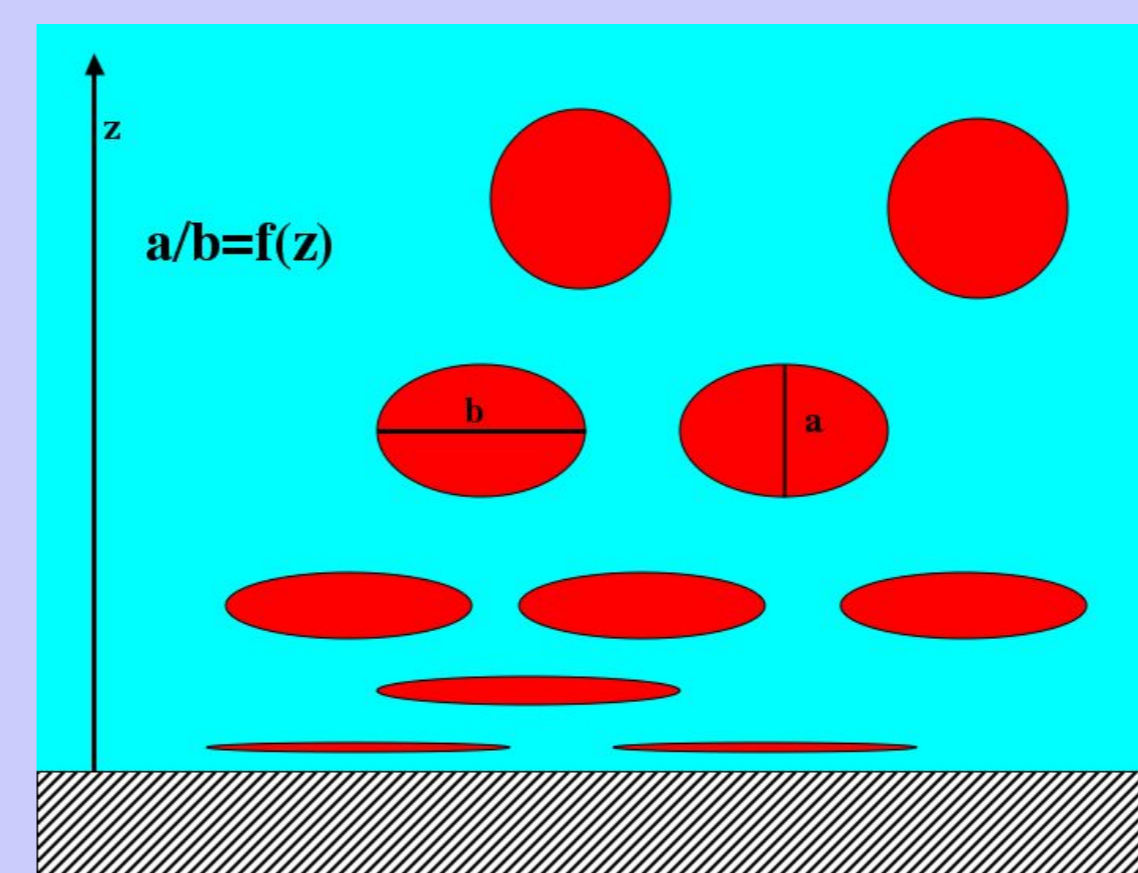
où  $K_0$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro et

$$\eta = \frac{2\delta t}{Re} \quad \mathcal{N}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \left( \log |\mathbf{x}| + K_0 \left( \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\eta}} \right) \right)$$

- les particules transportent une information concernant leur forme, les moments, à la fois ceux de la fonction  $c(\mathbf{x}, t)$  et ceux de la fonction indicatrice de la particule :

$$\mathcal{M}_{mn} = \int_{P_i} x^m y^n c(x, y, t) dx dy \quad \mathcal{G}_{mn} = \int_{P_i} x^m y^n dx dy$$

pour lesquels des équations de transport sont écrites.



à gauche, aplatissement des particules au voisinage de la paroi, à droite résultat sur une gamme étendue de nombre de Reynolds.

## Application 3 : Incertitude sur les propriétés du milieu

**Objectif :** Tenir compte de l'incertitude sur les caractéristiques physiques du milieu poreux, principalement la perméabilité et la dispersion mécanique dans les phénomènes de transport.

**Méthode :** 1) Représenter l'incertitude sur la vitesse de Darcy et la dispersion mécanique par deux variables aléatoires  $\xi$  et  $\eta$  de probabilités connues.

$$\text{vitesse de Darcy : } \mathbf{U} = \mathbf{U}_o + \eta, \quad \text{Dispersion mécanique : } D = D_o + \xi$$

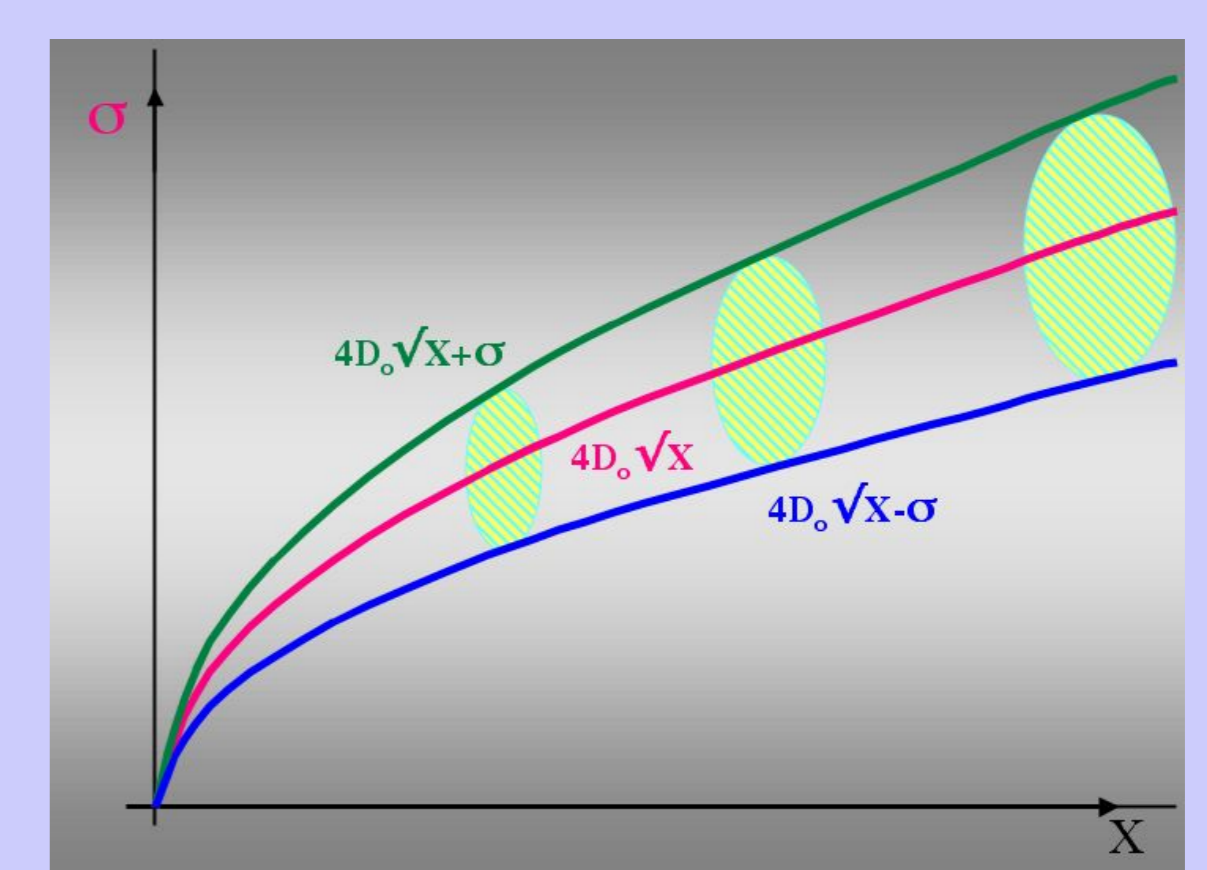
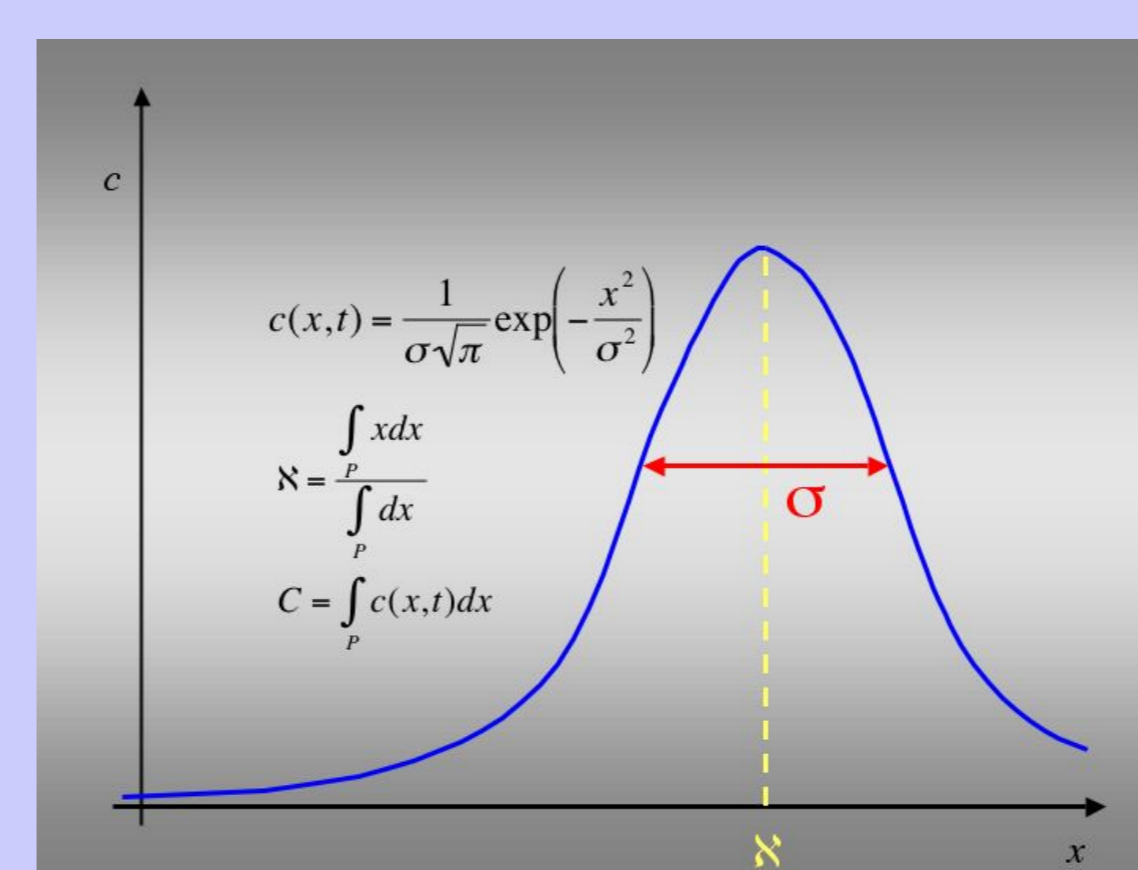
2) modéliser l'effet de celle-ci sur les moments caractérisant la particule. Pour des probabilités gaussiennes, en ne retenant que les moments jusqu'à l'ordre 2, les particules sont représentées par leur position  $\mathbf{X}_i$ , la quantité transportée  $C_i$  et les moments :

$$\sigma_{x_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \chi(\mathbf{x}_o, t_o; t, \xi) p(\xi) d\xi, \quad \sigma_{c_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 c((x - \chi_i), t; \eta) q(\eta) d\eta$$

La trajectoire d'une particule dans le plan  $(\sigma_x, \sigma_c)$  est définie par une équation de Langevin : cas où  $\mathbf{U}$  et  $D$  sont des constantes (voir figures) :

$$d\chi = (U_o + \xi) dt$$

$$d(\sigma_c^2) = (4D_o + \eta) dt$$



à gauche définition des particules, à droite : trajectoire d'une particule dans le plan  $(\chi, \sigma)$

Références :

- [1] : A. Beaudoin, S. Huberson & E. Rivoalen : "Simulation of anisotropic diffusion by means of a diffusion velocity method", Journal of Computational Physics, Volume 186, Issue 1, 20 March 2003. Pages 122-135.
- [2] : A. Beaudoin, S. Huberson & E. Rivoalen : "From Navier-Stokes to Stokes by means of particle method" Journal of Computational Physics, 2005.