

GdR Momas, novembre 2005

Comparaison de deux schémas de volumes finis pour opérateurs de diffusion anisotrope

Robert Eymard (Marne-la-Vallée)

en collaboration avec

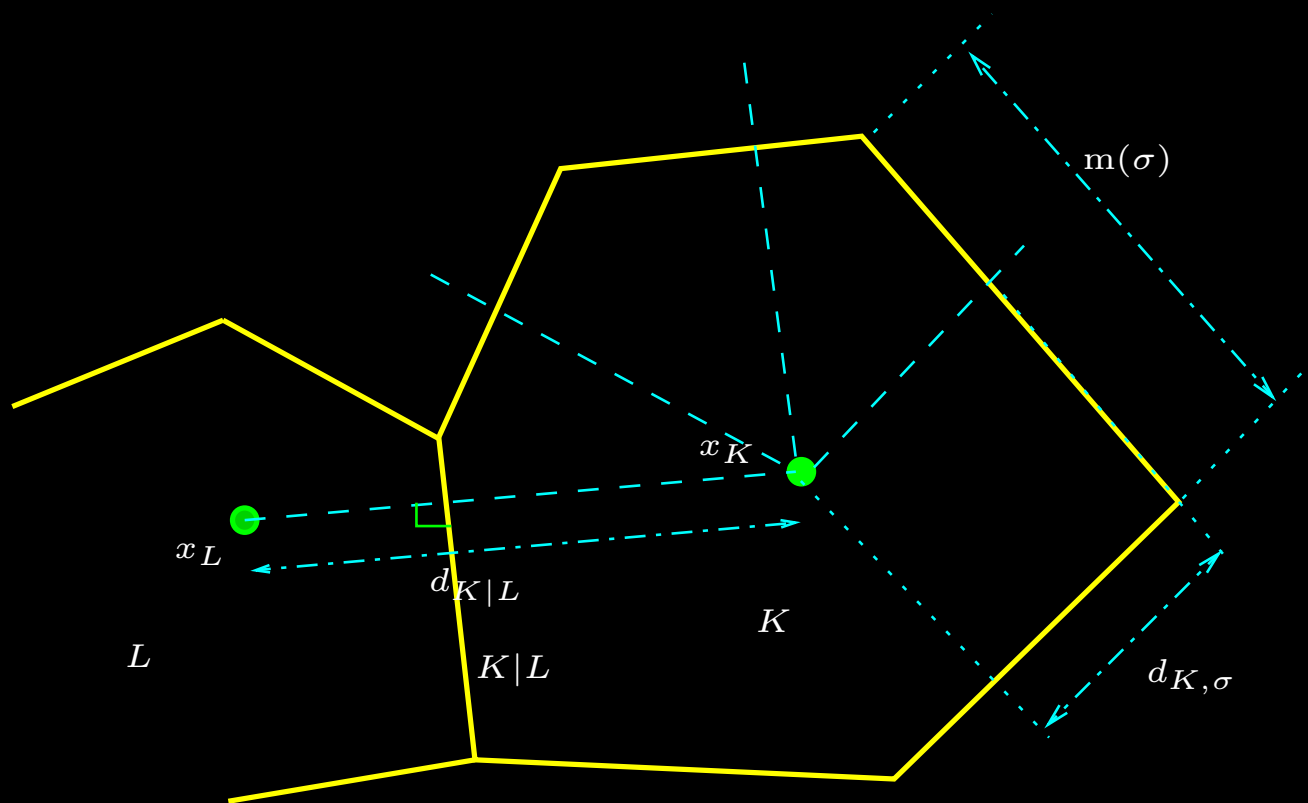
Thierry Gallouët et Raphaèle Herbin (Marseille)

Jérôme Droniou (Montpellier)

Cahier des charges

1. diffusion en milieu hétérogène et anisotrope
2. traitement du tenseur de dispersion cinématique
3. géométries quelconques
4. convergence (stabilité L^2)
5. principe du maximum (stabilité L^∞)

Schéma volumes finis gradients



Grilles admissibles : propriété d'orthogonalité

Schéma volumes finis gradients

- $H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ espace des fonctions constantes par maille
- produit scalaire pour conditions de Dirichlet

$$[u, v]_{\mathcal{T}} = \left(\begin{aligned} & \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K)(v_L - v_K) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} u_K v_K \end{aligned} \right)$$

- expression du gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{T}} u(x) = \frac{1}{m(K)} \left(\begin{aligned} & \sum_{L \in V_K} \frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} (u_L - u_K)(\bar{x}_{K|L} - x_K) \\ & + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K, \text{ext}}} \frac{m(\sigma)}{d(x_K, \sigma)} (0 - u_K)(\bar{x}_{\sigma} - x_K) \end{aligned} \right)$$

Schéma volumes finis gradients

- trouver $u \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} (\Lambda(x) - \alpha I) \nabla_{\mathcal{T}} u(x) \cdot \nabla_{\mathcal{T}} v(x) dx + \alpha [u, v]_{\mathcal{T}} = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_{\mathcal{T}}(\Omega)$$

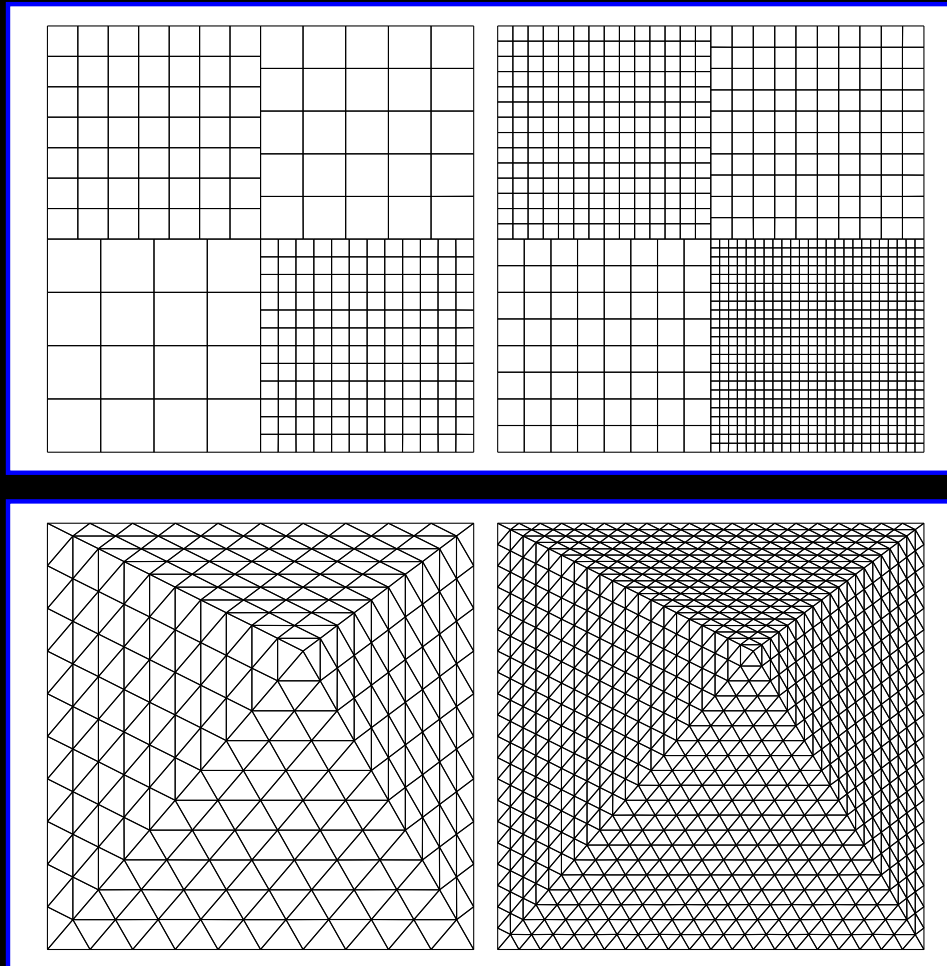
- expression du flux obtenue avec $v = 1_K$

$$F_{KL} =$$

$$\frac{m(K|L)}{d(x_K, x_L)} \left(\begin{array}{c} \alpha(u_K - u_L) + \\ (\Lambda_L - \alpha I)(\nabla_{\mathcal{T}} u)_L \cdot (\bar{x}_{K|L} - x_L) \\ -(\Lambda_K - \alpha I)(\nabla_{\mathcal{T}} u)_K \cdot (\bar{x}_{K|L} - x_K) \end{array} \right)$$

$$\text{avec } \Lambda_K = \frac{1}{m(K)} \int_K \Lambda(x) dx$$

Schéma volumes finis mixtes



Grilles quelconques : points x_K quelconques

Schéma volumes finis mixtes

- consistance entre approximations

$$\left\{ \begin{array}{l} u_L - u_K = \mathbf{v}_K \cdot (\bar{x}_{K|L} - x_K) + \mathbf{v}_L \cdot (x_L - \bar{x}_{K|L}) \\ \quad + \nu_K m(K) F_{K,\sigma} - \nu_L m(L) F_{L,\sigma}, \quad \forall \sigma = K|L, \\ 0 - u_K = \mathbf{v}_K \cdot (\bar{x}_\sigma - x_K) \\ \quad + \nu_K m(K) F_{K,\sigma}, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{K,\text{ext}} \end{array} \right.$$

- volumes finis $F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = 0, \quad \forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}$
- relation vecteur - composantes normales

$$m_K \Lambda_K \mathbf{v}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} (\bar{x}_\sigma - x_K), \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

$$\text{où } \Lambda_K = \frac{1}{m_K} \int_K \Lambda(x) dx$$

- conservation dans la maille

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = \int_K f(x) dx, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

Avantages, inconvénients

Propriétés	VF gradient	VF mixtes
Grilles	admissibles 2 et 3D	quelconques 2 et 3D
Convergence	forte L^2 : u et $\nabla_{\mathcal{T}}u$	forte $L^{2-\varepsilon}$: u et L^2 : \mathbf{v}
Stencil	24 pts 3D rec.	11 pts sur faces 3D
Calculs	syst.lin. u_K	syst.lin. u_σ
Positivité	oui si isotrope	?
Cas non lin.	dégénéré	Leray-Lions

Publications :

VF gradients <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00004840>

(publié dans IMAJNA)

VF mixtes <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00005565> (soumis)