

Homogénéisation des écoulements multiphasiques et non saturés en milieu poreux: de l'échelle des pores à l'échelle mésoscopique

Andro **Mikelic**

`Andro.Mikelic@univ-lyon1.fr`

Institut Camille Jordan, UFR Mathématiques
Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France

Monophasique

- La modélisation asymptotique des écoulements mono-phasiques incompressibles a été étudié dans un grand nombre d'articles et on sait que l'homogénéisation du système de Navier-Stokes donne
 1. *la loi de Darcy* pour un écoulement lent

Monophasique

- La modélisation asymptotique des écoulements mono-phasiques incompressibles a été étudié dans un grand nombre d'articles et on sait que l'homogénéisation du système de Navier-Stokes donne
 1. *la loi de Darcy* pour un écoulement lent
 2. *une loi de filtration non-linéaire et non-locale* pour un grand nombre de Reynolds. La *loi de Forchheimer* est une approximation quadratique de cette loi. (voir les travaux de A. Bourgeat, E. Marušić -Paloka et A. Mikelić sur le sujet)

Littérature

- Nous cherchons le comportement efficace d'un écoulement **diphasique immiscible** et incompressible à travers un milieu poreux.

Littérature

- Nous cherchons le comportement efficace d'un écoulement **diphasique immiscible** et incompressible à travers un milieu poreux.
- Dans les références classiques :
 1. A.E. Scheidegger, in : **Hydrodynamics in porous media**, Encyclopedia of Physics, Vol. VIII/2, 1963.
 2. J. Bear, **Dynamics of fluids in Porous Media**, Elsevier, New York, 1972.
 3. C.M. Marle, **Multiphase flow in porous media** (Editions Technip, Paris, 1981).
 4. S. Whitaker, **Transport in Porous Media 1** (1986)
 5. G. Chavent and J. Jaffré, **Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation** , North Holland, Amsterdam, 1986.

D1

nous trouvons le modèle suivant :

$$\vec{q}_j = -\frac{K}{\eta_j} k_j(s_j) (\nabla p_j - \rho_j g \vec{e}_z), \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

$$\Phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_j s_j) = -\mathbf{div} (\rho_j \vec{q}_j), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (3)$$

où

D1

nous trouvons le modèle suivant :

$$\vec{q}_j = -\frac{K}{\eta_j} k_j(s_j) (\nabla p_j - \rho_j g \vec{e}_z), \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

$$\Phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_j s_j) = -\mathbf{div} (\rho_j \vec{q}_j), \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (6)$$

où K est la perméabilité totale, s_j la saturation du j -ème fluide, \vec{q}_j la vitesse de filtration du j -ème fluide, Φ la porosité, p_j la pression du j -ème fluide, p_c la pression capillaire, g la gravitation, ρ_j la densité du j -ème fluide, η_j la viscosité du j -ème fluide et k_j la perméabilité relative du j -ème fluide.

Justification ?

- Le système (1) - (3) est valable dans **chaque point du milieu poreux**.
- Pour remplacer les équations posées dans les pores, par un système valable globalement, les **saturations** de chaque phase, donnant le pourcentage volumique de chaque fluide dans le point (x, t) , ont été introduites .

Justification ?

- Le système (1) - (3) est valable dans **chaque point du milieu poreux**.
- Pour remplacer les équations posées dans les pores, par un système valable globalement, les **saturations** de chaque phase, donnant le pourcentage volumique de chaque fluide dans le point (x, t) , ont été introduites .

JUSTIFICATION ?

Pour une présentation détaillée des résultats connus, voir A. Bourgeat, in : *Two-phase flow, Homogenization and porous media* , ed. U. Hornung , Interdisciplinary Applied Mathematics Series, Springer-Verlag, New-York, 1997, pp. 95-127.

J1 ?

Notons que la **prise de la moyenne** de Whitaker et Quintard donne seulement une réponse partielle. Commençons notre discussion en regardant le modèle où **la tension superficielle** est négligée. Nous nous attendons aux complications en performant l'homogénéisation des équations du mouvement dans un milieu poreux. Pour simplifier les choses nous allons considérer des écoulements diphasiques dans un domaine mince (un **pore**).

J1 ?

Notons que la **prise de la moyenne** de Whitaker et Quintard donne seulement une réponse partielle. Commençons notre discussion en regardant le modèle où **la tension superficielle** est négligée. Nous nous attendons aux complications en performant l'homogénéisation des équations du mouvement dans un milieu poreux. Pour simplifier les choses nous allons considérer des écoulements diphasiques dans un domaine mince (un **pore**).

Il est connu que pour un écoulement monophasique incompressible, on obtient la **loi de Reynolds** comme une limite singulière des équations de Navier-Stokes incompressibles, lorsque l'épaisseur caractéristique tend vers zéro (voir H. Dridi, *Comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes dans des domaines aplatis*,

J2 ?

Bull. Sc. Math. 106 (1982), p. 369–385. et les articles subséquents de G. Cimatti, dans Appl. Math. Optim. 1983 et G. Bayada et M.Chambat, dans Appl. Math. and Opt. 1986.)

Notons que la technique est empruntée des théories asymptotiques en élasticité, développées par l'école de P. Ciarlet.

J2 ?

Bull. Sc. Math. 106 (1982), p. 369–385. et les articles subséquents de G. Cimatti, dans Appl. Math. Optim. 1983 et G. Bayada et M.Chambat, dans Appl. Math. and Opt. 1986.)

Notons que la technique est empruntée des théories asymptotiques en élasticité, développées par l'école de P. Ciarlet.

Il est connu que, en absence de la tension superficielle, l'écoulement efficace de 2 fluides immiscibles et incompressibles est décrit par l'équation hyperbolique de Buckley-Leverett pour la saturation, couplée avec l'équation pour la pression.

Peut-on retrouver le système de Buckley-Leverett dans la limite quand l'épaisseur caractéristique du pore $\varepsilon \rightarrow 0$?

BL1

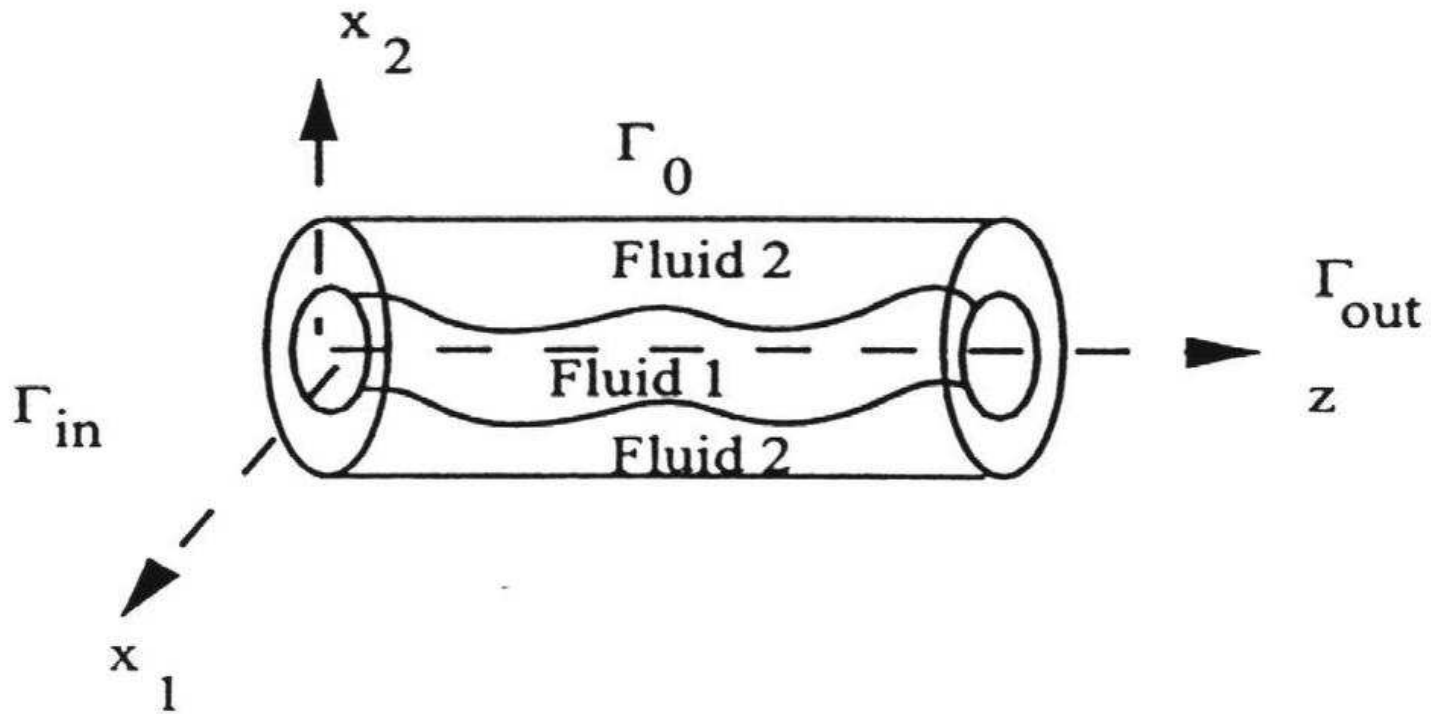
Nous considérons les équations de Navier-Stokes incompressibles, décrivant l'écoulement de 2 fluides, séparés par une frontière libre dans le tuyau $\Omega_\varepsilon =]0, \varepsilon R[\times]0, 2\pi[\times]0, L[$. La tension superficielle est négligée. A l'entrée et à la sortie la vitesse est donnée et elle est axi-symétrique. Nous supposons le tuyau horizontal, i.e. la gravité est négligée. Aussi nous supposons que les fluides ont été initialement séparés par une seule frontière ayant la symétrie axiale.

BL1

Nous considérons les équations de Navier-Stokes incompressibles, décrivant l'écoulement de 2 fluides, séparés par une frontière libre dans le tuyau $\Omega_\varepsilon =]0, \varepsilon R[\times]0, 2\pi[\times]0, L[$. La tension superficielle est négligée. A l'entrée et à la sortie la vitesse est donnée et elle est axi-symétrique. Nous supposons le tuyau horizontal, i.e. la gravité est négligée. Aussi nous supposons que les fluides ont été initialement séparés par une seule frontière ayant la symétrie axiale.

Pour chaque fluide nous avons le système de **Navier-Stokes incompressible**, mais avec des **viscosités** et des **densités différentes**. Sur l'interface, qui est une frontière libre, nous imposons la continuité des vitesses et des contraintes normales.

BL2



BL3

La frontière libre est déterminée par la **condition de la non-miscibilité** :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - v_\rho + v_z \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

BL3

La frontière libre est déterminée par la **condition de la non-miscibilité** :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - v_\rho + v_z \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

où $\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_z \vec{e}_z$ est la vitesse dans les coordonnées cylindriques et $r = h(z, t)$ **l'équation de la frontière libre**. En suivant les résultats de A. Nouri et F. Poupaud (voir J. Differ. Eq. 122(1995)) , on trouve que l'évolution de la viscosité est donnée par l'équation du transport linéaire pour η . En supposant un écoulement lent, nous avons :

BL4

Le problème de départ

$$-\mathbf{div} (\eta^\varepsilon D(\vec{v}^\varepsilon)) + \nabla p^\varepsilon = -\rho^\varepsilon \vec{e}_z \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \times]0, T[, \quad (9)$$

$$\mathbf{div} \vec{v}^\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \times]0, T[, \quad (10)$$

BL4

Le problème de départ

$$-\mathbf{div} (\eta^\varepsilon D(\vec{v}^\varepsilon)) + \nabla p^\varepsilon = -\varrho^\varepsilon \vec{e}_z \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \times]0, T[, \quad (13)$$

$$\mathbf{div} \vec{v}^\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \times]0, T[, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{div} (\eta^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon) = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \times]0, T[\\ \frac{\partial \varrho^\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{div} (\varrho^\varepsilon \vec{v}^\varepsilon) = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \times]0, T[, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \eta^\varepsilon(t=0) = \eta_0^\varepsilon(x) \in \{\eta_1, \eta_2\} & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \varrho^\varepsilon(t=0) = \varrho_0^\varepsilon(x) \in \{\varrho_1, \varrho_2\} & \text{in } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (16)$$

BL5

Les conditions aux limites sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{les composantes tangentielles de } \vec{v}^\varepsilon \text{ sont zéro sur} \\ (\Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{out}^\varepsilon) \times]0, T[\\ \vec{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \bar{\Gamma}_0^\varepsilon \times]0, T[, \\ p^\varepsilon = p_0(t) \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[\text{ et } p^\varepsilon = p_1(t) \text{ sur } \Gamma_{out}^\varepsilon \times]0, T[, \\ \eta^\varepsilon = \eta_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \text{ et } \varrho^\varepsilon = \varrho_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \end{array} \right. \quad (17)$$

BL5

Les conditions aux limites sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{les composantes tangentielles de } \vec{v}^\varepsilon \text{ sont zéro sur} \\ (\Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{out}^\varepsilon) \times]0, T[\\ \vec{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \bar{\Gamma}_0^\varepsilon \times]0, T[, \\ p^\varepsilon = p_0(t) \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[\text{ et } p^\varepsilon = p_1(t) \text{ sur } \Gamma_{out}^\varepsilon \times]0, T[, \\ \eta^\varepsilon = \eta_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \text{ et } \varrho^\varepsilon = \varrho_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \end{array} \right. \quad (18)$$

où $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{out}^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_0^\varepsilon$ est la frontière de Ω_ε ,
 $\Gamma_{in}^\varepsilon =]0, \varepsilon R(0)[\times]0, 2\pi[\times \{0\}$ et $\Gamma_{out}^\varepsilon =]0, \varepsilon R(L)[\times]0, 2\pi[\times \{L\}$.
L'existence d'une solution pour (9) - (17) est montré en analogie avec des résultats de Nouri et Poupaud.

BL6

Supposons que $\varrho_1 = \varrho_2$ et qu'on se donne la vitesse normale à l'entrée/sortie, au lieu de connaître la chute de la pression. Alors on a

Théorème 1. (Nouri, Poupaud, Demay 1995) Soit Ω un ouvert Lipschitzien dans \mathbb{R}^n , avec $n = 2, 3$. Soit

$\vec{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega)$, $\vec{u}_0 \cdot \vec{\nu} < 0$ sur Γ_{in} , $\vec{u}_0 \cdot \vec{\nu} > 0$ sur Γ_{out} et soit $\eta_j > 0$, $j = 1, 2$.

BL6

Supposons que $\varrho_1 = \varrho_2$ et qu'on se donne la vitesse normale à l'entrée/sortie, au lieu de connaître la chute de la pression. Alors on a

Théorème 1. (Nouri, Poupaud, Demay 1995) Soit Ω un ouvert Lipschitzien dans \mathbb{R}^n , avec $n = 2, 3$. Soit

$\vec{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega)$, $\vec{u}_0 \cdot \vec{\nu} < 0$ sur Γ_{in} , $\vec{u}_0 \cdot \vec{\nu} > 0$ sur Γ_{out} et soit $\eta_j > 0$, $j = 1, 2$.

Alors il existe au moins une solution faible $\{\vec{v}, \eta, p\}$ pour le problème (9) - (17), i. e. pour le problème variationnel :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \{ \vec{v}, \eta, p \} &\in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)^n) \\ &\times L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

tels que on ait (9) -(11) au sens des distributions, les traces

BL7

de la vitesse satisfaisant (17) et

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi \right) = \int_{\Omega} \eta_0(x) \varphi(x, 0) dx$$
$$+ \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Gamma_{in}} \eta_{in}(x, t) \varphi(x, t) |\vec{u}_0 \cdot \vec{\nu}| d\sigma(x) dt,$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{T} = \{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}) : \varphi(x, t) = 0 \text{ pour } t > 0$$
$$\text{et } x \in \Gamma_{out} \}. \quad (19)$$

BL7

de la vitesse satisfaisant (17) et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi \right) &= \int_{\Omega} \eta_0(x) \varphi(x, 0) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Gamma_{in}} \eta_{in}(x, t) \varphi(x, t) |\vec{u}_0 \cdot \vec{\nu}| d\sigma(x) dt, \\ \forall \varphi \in \mathcal{T} &= \{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}) : \varphi(x, t) = 0 \text{ pour } t > 0 \\ &\text{et } x \in \Gamma_{out} \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Dans notre cas, $\Omega = \Omega_\varepsilon$ et nos inconnues portent un ε . En plus

$$(\varrho^\varepsilon, \eta^\varepsilon) \in \{(\varrho_1, \eta_1), (\varrho_2, \eta_2)\} \text{ in } \Omega_\varepsilon \times [0, T[.$$

BL8

Pour proposer un développement asymptotique nous avons besoin des estimation a priori pour $\{\overline{v}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$.

Proposition 1 Soit $\{\overline{v}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ une solution faible pour le problème (9) - (17). Alors on a

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\overline{v}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^3} \leq C\varepsilon^3, \quad (21)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\nabla \overline{v}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^3} \leq C\varepsilon^2. \quad (22)$$

Pour p^ε on a

$$\sup_{t \in [0, T]} \|p^\varepsilon\|_{L_0^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon, \quad (23)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\nabla p^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2. \quad (24)$$

Le problème dilaté

Maintenant nous transformons le problème (9) - (17) en un problème équivalent posé dans

$\Omega = (0, R(z)) \times (0, 2\pi) \times (0, L)$. Soit u_ρ la composante radiale, u_θ la composante angulaire et u_3 la composante axiale d' u , i.e $\vec{v}^\varepsilon = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\theta \vec{e}_\theta + v_3 \vec{e}_z$.

Le problème dilaté :

Le problème dilaté

Maintenant nous transformons le problème (9) - (17) en un problème équivalent posé dans

$\Omega = (0, R(z)) \times (0, 2\pi) \times (0, L)$. Soit u_ρ la composante radiale, u_θ la composante angulaire et u_3 la composante axiale d' u , i.e $\vec{v}^\varepsilon = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\theta \vec{e}_\theta + v_3 \vec{e}_z$.

Le problème dilaté :

$$-\operatorname{div}_\varepsilon(\eta(\varepsilon)D_\varepsilon(\vec{v}^\varepsilon)) + \nabla_\varepsilon p(\varepsilon) = -\rho(\varepsilon)g\vec{e}_z$$

dans $\Omega \times (0, T)$, (27)

$$\operatorname{div}_\varepsilon \vec{v}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (28)$$

PD1

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta(\varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{div}_\varepsilon(\eta(\varepsilon) \overrightarrow{v}(\varepsilon)) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \varrho(\varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{div}_\varepsilon(\varrho(\varepsilon) \overrightarrow{v}(\varepsilon)) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \eta(\varepsilon)(t = 0) = \eta_0(x) \in \{\eta_1, \eta_2\} & \text{dans } \Omega, \\ \varrho(\varepsilon)(t = 0) = \varrho_0(x) \in \{\varrho_1, \varrho_2\} & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (30)$$

où

PD1

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta(\varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{div}_\varepsilon(\eta(\varepsilon) \vec{v}(\varepsilon)) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \varrho(\varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{div}_\varepsilon(\varrho(\varepsilon) \vec{v}(\varepsilon)) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \eta(\varepsilon)(t=0) = \eta_0(x) \in \{\eta_1, \eta_2\} & \text{dans } \Omega, \\ \varrho(\varepsilon)(t=0) = \varrho_0(x) \in \{\varrho_1, \varrho_2\} & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (32)$$

où

$$\begin{aligned} (\nabla_\varepsilon u)_{11} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\rho}{\partial r}, & (\nabla_\varepsilon u)_{22} &= \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ (\nabla_\varepsilon u)_{12} &= \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta}, & (\nabla_\varepsilon u)_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

PD2

$$(\nabla_\varepsilon u)_{13} = \frac{\partial u_\rho}{\partial x_3}, \quad (\nabla_\varepsilon u)_{23} = \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3},$$

$$(\nabla_\varepsilon u)_{32} = \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta}, \quad (\nabla_\varepsilon u)_{21} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho},$$

$$(\nabla_\varepsilon u)_{31} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_3}{\partial \rho},$$

$$(D_\varepsilon(u))_{ij} = \frac{1}{2} ((\nabla_\varepsilon u)_{ij} + (\nabla_\varepsilon u)_{ji}), \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$\mathbf{div}_\varepsilon u = \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\rho) + \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

PD2

$$\begin{aligned}(\nabla_\varepsilon u)_{13} &= \frac{\partial u_\rho}{\partial x_3}, & (\nabla_\varepsilon u)_{23} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial x_3}, \\(\nabla_\varepsilon u)_{32} &= \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta}, & (\nabla_\varepsilon u)_{21} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho}, \\(\nabla_\varepsilon u)_{31} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_3}{\partial \rho},\end{aligned}$$

$$(D_\varepsilon(u))_{ij} = \frac{1}{2}((\nabla_\varepsilon u)_{ij} + (\nabla_\varepsilon u)_{ji}), \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$\operatorname{div}_\varepsilon u = \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\rho) + \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Les conditions aux limites sont :

PD3

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\rho(\varepsilon)|_{z=0} = v_\theta(\varepsilon)|_{z=0} = 0 \text{ dans }]0, R(0)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ v_\rho(\varepsilon)|_{z=L} = v_\theta(\varepsilon)|_{z=L} = 0 \text{ dans }]0, R(L)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ p(\varepsilon)(r, \theta, 0, t) = p_0(t) \text{ dans }]0, R(0)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ p(\varepsilon)(r, \theta, L, t) = p_1(t) \text{ dans }]0, R(L)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ \vec{v}(\varepsilon)(r, \theta, z, t) = 0 \text{ dans } \{R(z)\} \times]0, 2\pi[\times]0, L[\times]0, T[, \\ \eta(\varepsilon)|_{z=0} = \eta_{in} \in \{\eta_1, \eta_2\} \text{ dans }]0, R(0)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ \varrho(\varepsilon)|_{z=0} = \varrho_{in} \in \{\varrho_1, \varrho_2\} \text{ dans }]0, R(0)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[. \end{array} \right. \quad (33)$$

PD3

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\rho(\varepsilon)|_{z=0} = v_\theta(\varepsilon)|_{z=0} = 0 \text{ dans }]0, R(0)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ v_\rho(\varepsilon)|_{z=L} = v_\theta(\varepsilon)|_{z=L} = 0 \text{ dans }]0, R(L)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ p(\varepsilon)(r, \theta, 0, t) = p_0(t) \text{ dans }]0, R(0)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ p(\varepsilon)(r, \theta, L, t) = p_1(t) \text{ dans }]0, R(L)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ \vec{v}(\varepsilon)(r, \theta, z, t) = 0 \text{ dans } \{R(z)\} \times]0, 2\pi[\times]0, L[\times]0, T[, \\ \eta(\varepsilon)|_{z=0} = \eta_{in} \in \{\eta_1, \eta_2\} \text{ dans }]0, R(0)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[, \\ \varrho(\varepsilon)|_{z=0} = \varrho_{in} \in \{\varrho_1, \varrho_2\} \text{ dans }]0, R(0)[\times]0, 2\pi[\times]0, T[. \end{array} \right. \quad (34)$$

Notons que la solution ne dépend pas de θ . Alors

$$\eta(\varepsilon)(r, z, t) = \eta^\varepsilon(x, t), \quad \varrho(\varepsilon)(r, z, t) = \varrho^\varepsilon(x, t), \text{ et} \\ \vec{v}(\varepsilon)(r, z, t) = \vec{v}^\varepsilon(x, t), \quad p(\varepsilon)(r, z, t) = p^\varepsilon(x, t)$$

PD4

avec $(x, t) \in \Omega_\varepsilon \times]0, T[$, $r = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{\varepsilon^2}}$ et $z = x_3$. Les équations (25)-(30) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta(\varepsilon) \frac{\partial v(\varepsilon)_\rho}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta(\varepsilon)}{2} \left(\frac{\partial v(\varepsilon)_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v(\varepsilon)_3}{\varepsilon \partial r} \right) \right) - \\ \frac{\eta(\varepsilon) v(\varepsilon)_\rho}{\varepsilon^2 r^2} = \frac{\partial p(\varepsilon)}{\varepsilon \partial r}, \\ \frac{1}{\varepsilon^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta(\varepsilon) r^2}{2} \left(\frac{\partial v(\varepsilon)_\theta}{\partial r} - \frac{v(\varepsilon)_\theta}{r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta(\varepsilon)}{2} \frac{\partial v(\varepsilon)_\theta}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta(\varepsilon) r}{2} \left(\frac{\partial v(\varepsilon)_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v(\varepsilon)_3}{\varepsilon \partial r} \right) \right) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta(\varepsilon) \frac{\partial v(\varepsilon)_3}{\partial z} \right) - \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial z} = \varrho(\varepsilon) g, \end{array} \right. \quad (35)$$

PD5

$$\frac{\partial v(\varepsilon)_\rho}{\varepsilon \partial r} + \frac{v(\varepsilon)_\rho}{\varepsilon r} + \frac{\partial v(\varepsilon)_3}{\partial z} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \eta(\varepsilon)}{\partial t} + v(\varepsilon)_\rho \frac{\partial \eta(\varepsilon)}{\varepsilon \partial r} + v(\varepsilon)_3 \frac{\partial \eta(\varepsilon)}{\partial z} = 0. \quad (37)$$

(21), (22) et (23) \Rightarrow

PD5

$$\frac{\partial v(\varepsilon)_\rho}{\varepsilon \partial r} + \frac{v(\varepsilon)_\rho}{\varepsilon r} + \frac{\partial v(\varepsilon)_3}{\partial z} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \eta(\varepsilon)}{\partial t} + v(\varepsilon)_\rho \frac{\partial \eta(\varepsilon)}{\varepsilon \partial r} + v(\varepsilon)_3 \frac{\partial \eta(\varepsilon)}{\partial z} = 0. \quad (41)$$

(21), (22) et (23) \Rightarrow

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\{ \|\vec{v}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^3} + \left\| \frac{\partial}{\partial r} \vec{v}(\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial z} \vec{v}(\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \right\} \leq C \varepsilon^2 \quad (42)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|p(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial r} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \quad (43)$$

PD6

Soit $\tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$. (l'échelle du temps adaptée à la vitesse caractéristique). Les estimations a priori impliquent les développements asymptotiques suivants :

$$\vec{v}(\varepsilon)(r, z, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^{i+2} v^i(r, z, \tau), \quad (44)$$

$$p(\varepsilon)(r, z, t) = p^0(z, \tau) + \sum_{i \geq 1} \varepsilon^i p^i(r, z, \tau), \quad (45)$$

$$\eta(\varepsilon)(r, z, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \eta^i(r, z, \tau), \quad (46)$$

$$\varrho(\varepsilon)(r, z, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \varrho^i(r, z, \tau). \quad (47)$$

PD7

Le problème bifluide à 2-échelles

Après l'insertion des développements (44)-(47) dans les équations (35) - (37) on trouve que $v_\rho^0 = 0$, $v_\theta^j = 0$, $\forall j$. et l'approximation d'ordre zéro du système (35) - (37) est :

$$\frac{\partial v_3^0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\rho^1) = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \quad (48)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta^0 r}{2} \frac{\partial v_3^0}{\partial r} \right) - \frac{\partial p^0}{\partial z} = \varrho^0 g \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \quad (49)$$

$$\frac{\partial \eta^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_3^0 \eta^0) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\rho^1 \eta^0) = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \quad (50)$$

PD8

$$\frac{\partial \varrho^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(v_3^0 \varrho^0) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_\rho^1 \varrho^0) = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \quad (51)$$

$$v_\rho^1 = 0 \text{ dans } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (52)$$

$$p^0(0, t) = p_0(t) \text{ et } p^0(L, t) = p_1(t) \text{ sur }]0, T[, \quad (53)$$

$$\eta^0 = \eta_{in} \in \{\eta_1, \eta_2\} \text{ et } \varrho^0 = \varrho_{in} \in \{\varrho_1, \varrho_2\} \text{ sur } \Gamma_{in} \times]0, T[, \quad (54)$$

$$\eta^0(r, z, 0) = \eta_0(r, z) \in \{\eta_1, \eta_2\}, \quad (55)$$

$$\varrho^0(r, z, 0) = \varrho_0(r, z) \in \{\varrho_1, \varrho_2\}. \quad (56)$$

Le problème (48)-(56), où nous cherchons des fonctions inconnues $v_\rho^1(r, z, t)$, $v_3^0(r, z, t)$, $\eta^0(r, z, t)$, $\varrho^0(r, z, t)$ et $p^0(z, t)$, est une variante **dégénérée** du problème (9) - (17).

PD9

Etablir un résultat général de l'existence et de l'unicité est une question ouverte. Néanmoins, nous allons effectuer une réduction de " **type lubrification** " et simplifier le problème. Nous trouvons

$$v_3^0(r, z, t) = -\frac{dp^0}{dz}(z, t) \int_r^R \frac{x dx}{\eta^0(x, z, t)} - \int_r^R \frac{2g dx}{x\eta^0(x, z, t)} \left(\int_0^x \varrho^0(\xi, z, t)\xi d\xi \right). \quad (57)$$

PD9

Etablir un résultat général de l'existence et de l'unicité est une question ouverte. Néanmoins, nous allons effectuer une réduction de " **type lubrification** " et simplifier le problème. Nous trouvons

$$v_3^0(r, z, t) = -\frac{dp^0}{dz}(z, t) \int_r^R \frac{x dx}{\eta^0(x, z, t)} - \int_r^R \frac{2g dx}{x\eta^0(x, z, t)} \left(\int_0^x \varrho^0(\xi, z, t)\xi d\xi \right). \quad (59)$$

avec

$$-\frac{dp^0}{dz} = \frac{p_0(t) - p_1(t)}{\int_0^L \frac{d\xi}{I_1(\xi)}} \frac{1}{I_1(z)} - \frac{g}{I_1(z)} \left\{ \frac{1}{\int_0^L \frac{d\xi}{I_1(\xi)}} \int_0^L \frac{I_2(\xi) d\xi}{I_1(\xi)} - I_2(z) \right\} \quad (60)$$

PD10

où $I_1(z) = \int_0^{R(z)} \frac{x^3 dx}{2\eta^0(x,z,t)}$ et

$$I_2(z) = \int_0^{R(z)} \frac{x}{\eta^0(x,z,t)} \left(\int_0^x \rho^0(\xi, z, t) \xi d\xi \right) dx$$

PD10

où $I_1(z) = \int_0^{R(z)} \frac{x^3 dx}{2\eta^0(x,z,t)}$ et

$$I_2(z) = \int_0^{R(z)} \frac{x}{\eta^0(x,z,t)} \left(\int_0^x \varrho^0(\xi, z, t) \xi d\xi \right) dx$$

L'équation de Buckley-Leverett

Maintenant nous utilisons la structure particulière de notre problème :

$$\eta^0(r, z, 0) = \begin{cases} \eta_1 & \text{pour } 0 \leq r \leq a_0(z), \\ \eta_2 & \text{pour } a_0(z) < r \leq R(z) \end{cases} \quad (63)$$

$$\eta^0(r, 0, t) = \begin{cases} \eta_1 & \text{pour } 0 \leq r \leq a_0(z), \\ \eta_2 & \text{pour } a_0(z) < r \leq R(z) \\ \eta_1 & \text{pour } 0 \leq r \leq a_1(t), \\ \eta_2 & \text{pour } a_1(t) < r \leq R(0) \end{cases} \quad (64)$$

BLH1

où a_0 et a_1 sont des fonctions à variation bornée, définies sur $[0, L]$ et $[0, T]$, respect. et telles que

BLH1

où a_0 et a_1 sont des fonctions à variation bornée, définies sur $[0, L]$ et $[0, T]$, respect. et telles que $a_1(0) = a_0(0)$ et $\delta_0 \leq a_0(z) \leq R(z) - \delta_0$ pour $\forall z \in [0, L]$, avec $0 < \delta_0 \ll 1$. Nous supposons la même chose sur ρ^0 . Nous cherchons η^0 et ϱ^0 dans la forme :

$$\eta^0(r, z, t) = \eta_1 \mathcal{X}_{]0, a(z, t)[} + \eta_2 \mathcal{X}_{]a(z, t), R(z)[} \quad \text{sur } [0, L] \times]0, T[. \quad (67)$$

$$\varrho^0(r, z, t) = \varrho_1 \mathcal{X}_{]0, a(z, t)[} + \varrho_2 \mathcal{X}_{]a(z, t), R(z)[}, \quad \text{sur } [0, L] \times]0, T[. \quad (68)$$

Nous cherchons une équation décrivant l'évolution de la frontière libre $a(z, t)$. Nous avons :

BLH2

$$I_1(a, R) = \int_0^{R(z)} \frac{x^3}{2\eta^0(x, z, t)} dx = \frac{a^4(z, t)}{8\eta_1} + \frac{R^4(z) - a^4(z, t)}{8\eta_2}, \quad (69)$$

$$I_2(a, R) = \int_0^{R(z)} \frac{x}{\eta^0(x, z, t)} \left(\int_0^x \varrho^0(\xi, z, t) \xi d\xi \right) dx = \frac{\varrho_1}{\eta_1} \frac{a^4(z, t)}{8} + \frac{\varrho_2}{\eta_2} \frac{R^4(z) - a^4(z, t)}{8} + \frac{(\varrho_1 - \varrho_2) a^2(z, t) (R^2(z) - a^2(z, t))}{\eta_2 \cdot 4}. \quad (70)$$

BLH2

$$I_1(a, R) = \int_0^{R(z)} \frac{x^3}{2\eta^0(x, z, t)} dx = \frac{a^4(z, t)}{8\eta_1} + \frac{R^4(z) - a^4(z, t)}{8\eta_2}, \quad (71)$$

$$I_2(a, R) = \int_0^{R(z)} \frac{x}{\eta^0(x, z, t)} \left(\int_0^x \varrho^0(\xi, z, t) \xi d\xi \right) dx = \frac{\varrho_1}{\eta_1} \frac{a^4(z, t)}{8} + \frac{\varrho_2}{\eta_2} \frac{R^4(z) - a^4(z, t)}{8} + \frac{(\varrho_1 - \varrho_2) a^2(z, t) (R^2(z) - a^2(z, t))}{\eta_2 \cdot 4}. \quad (72)$$

Dans le cas axi-symétrique, la saturation est donnée par :

BLH3

$$s(z, t) = \frac{a^2(z, t)}{R^2(z)}.$$

Soit $M = \eta_1/\eta_2$ et

$$k(z) = \frac{\pi R^4(z)}{4}$$

la perméabilité absolue.

BLH3

$$s(z, t) = \frac{a^2(z, t)}{R^2(z)}.$$

Soit $M = \eta_1/\eta_2$ et

$$k(z) = \frac{\pi R^4(z)}{4}$$

la perméabilité absolue.

Dans le cas $g \equiv 0$, nous trouvons:

$$2\pi \int_0^{a(z,t)} r v_3^0(r, z, t) dr = -k(z) \frac{k_{r1}(s)}{\eta_1} \frac{dp^0}{dz}$$

$$2\pi \int_{a(z,t)}^{R(z)} r v_3^0(r, z, t) dr = -k(z) \frac{k_{r2}(s)}{\eta_2} \frac{dp^0}{dz},$$

avec

BLH4

$$\begin{cases} k_{r1}(s) = s(s(1 - 2M) + 2M) \\ k_{r2}(s) = (1 - s)^2 \end{cases} \quad (73)$$

$s \in [0, 1]$. Il est clair que $k_{ri}(s) > 0$ pour tout $s \in]0, 1[$ et $k_{r1}(0) = k_{r2}(1) = 0$, $k_{r1}(1) = k_{r2}(0) = 1$. De plus, pour $0 < M < 1$ on a $k'_{r1} > 0$ et $k'_{r2} < 0$ on $]0, 1[$.

La " **fractional flow function** " de Buckley-Leverett pour ce système est donnée par :

BLH4

$$\begin{cases} k_{r1}(s) = s(s(1 - 2M) + 2M) \\ k_{r2}(s) = (1 - s)^2 \end{cases} \quad (74)$$

$s \in [0, 1]$. Il est clair que $k_{ri}(s) > 0$ pour tout $s \in]0, 1[$ et $k_{r1}(0) = k_{r2}(1) = 0$, $k_{r1}(1) = k_{r2}(0) = 1$. De plus, pour $0 < M < 1$ on a $k'_{r1} > 0$ et $k'_{r2} < 0$ on $]0, 1[$.

La " **fractional flow function** " de Buckley-Leverett pour ce système est donnée par :

$$F(s) = \frac{\frac{k_{r1}(s)}{\eta_1}}{\frac{k_{r1}(s)}{\eta_1} + \frac{k_{r2}(s)}{\eta_2}} = \frac{s^2(1 - 2M) + 2Ms}{s^2(1 - M) + M}.$$

$$F' > 0, \quad \forall s \in [0, 1].$$

BLH5

$$F''(s) = 2M \left(2s^3(M-1)^2 - 3s^2(1-M)(1-2M) - 6sM(1-M) + M(1-2M) \right) \frac{1}{(s^2(1-M) + M)^3},$$

et pour $M \in (0, 1/2)$ il existe un unique $s_0 \in]0, 1[$ tel que $F''(s) = 0$. Alors dans ce cas F a la forme de la lettre S .

BLH5

$$F''(s) = 2M \left(2s^3(M-1)^2 - 3s^2(1-M)(1-2M) - 6sM(1-M) + M(1-2M) \right) \frac{1}{(s^2(1-M) + M)^3},$$

et pour $M \in (0, 1/2)$ il existe un unique $s_0 \in]0, 1[$ tel que $F''(s) = 0$. Alors dans ce cas F a la forme de la lettre S . Si $s < s_0$ la "fractional flow function" est convexe et pour $s > s_0$ elle est concave. Si $M \geq 1/2$, F est une fonction concave. Maintenant nous utilisons l'équation (50) pour trouver une EDP pour $a(z, t)$. On a

BLH6

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(v_3^0 \eta^0) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_\rho^1 \eta^0) = 0 = \\ (\eta_1 - \eta_2) \left(\frac{\partial a}{\partial t} + v_3^0 \frac{\partial a}{\partial z} - v_\rho^1 \right) \delta(r - a), \end{aligned} \quad (75)$$

BLH6

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_3^0 \eta^0) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\rho^1 \eta^0) &= 0 = \\ (\eta_1 - \eta_2) \left(\frac{\partial a}{\partial t} + v_3^0 \frac{\partial a}{\partial z} - v_\rho^1 \right) \delta(r - a), & \quad (77) \end{aligned}$$

où δ est l'axi-symétrique mesure de Dirac, donnée par $\langle \delta(r - b), \psi \rangle = b\psi(b)$. Maintenant nous intégrons l'équation (75), par rapport à r , et en utilisant (48) et (57), nous trouvons :

$$\begin{cases} \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{a(z,t)} 2rv_3^0 dr = 0. \text{ in }]0, L[\times]0, T[, \\ a(z, t = 0) = a_0(z) \text{ in }]0, L[, a(z = 0, t) = a_1(t) \text{ in }]0, T[\end{cases} \quad (78)$$

BLH7

Pour $g \equiv 0$ (i.e. l'absence de la gravité) la vitesse de Darcy du 1er fluide est donnée par

$$\int_0^{a(z,t)} 2rv_3^0 dr = -\frac{dp^0}{dz} \frac{k(z)}{\pi} \frac{k_{r1}(s)}{\eta_1}$$

et nous rappelons que le débit est

BLH7

Pour $g \equiv 0$ (i.e. l'absence de la gravité) la vitesse de Darcy du 1er fluide est donnée par

$$\int_0^{a(z,t)} 2rv_3^0 dr = -\frac{dp^0}{dz} \frac{k(z)}{\pi} \frac{k_{r1}(s)}{\eta_1}$$

et nous rappelons que le débit est

$$Q(t) = 2\pi \int_0^{R(z)} v_3^0 r dr = -\frac{dp^0}{dz} k(z) \left(\frac{k_{r1}(s)}{\eta_1} + \frac{k_{r2}(s)}{\eta_2} \right)$$

En conséquence

BLH8

$$\int_0^{a(z,t)} 2rv_3^0 dr = \frac{Q(t)}{\pi} F(s)$$

et nous avons trouvé la loi de conservation scalaire suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\pi R^2(z)s(z,t)) + \frac{\partial}{\partial z} (Q(t)F(s)) = 0 \text{ dans }]0, L[\times]0, T[\\ s(z, t = 0) = a_0^2(z)/R^2(z) \text{ dans }]0, L[, \\ s(z = 0, t) = a_1^2(t)/R^2(0) \text{ dans }]0, T[. \end{cases} \quad (79)$$

BLH8

$$\int_0^{a(z,t)} 2rv_3^0 dr = \frac{Q(t)}{\pi} F(s)$$

et nous avons trouvé la loi de conservation scalaire suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\pi R^2(z)s(z,t)) + \frac{\partial}{\partial z} (Q(t)F(s)) = 0 \text{ dans }]0, L[\times]0, T[\\ s(z, t = 0) = a_0^2(z)/R^2(z) \text{ dans }]0, L[, \\ s(z = 0, t) = a_1^2(t)/R^2(0) \text{ dans }]0, T[. \end{cases} \quad (80)$$

Comme $F(s)$ est une fonction monotone et croissante, la théorie classique nous garantit que nous avons une solution entropique unique $a \in BV(]0, L[\times]0, T[)$, telle

BLH9

que $0 \leq a(z) \leq R(z)$. Si les conditions aux limites et les conditions initiales sont compatibles, i. e. si $a_1(0) = a_0(0)$, le problème (79) admet une solution régulière unique $t \in]0, \tau[$, avec $\tau > 0$. Comme F est convexe/concave la solution entropique est calculable par la méthode des caractéristiques, en utilisant le problème de Riemann. Pour les détails voir

P. Concus and W. Proskurowski, *Numerical Solution of a Nonlinear Hyperbolic Equation by the Random Choice Method*, J. Comp. Physics, Vol. 30 (1979), p. 153 -166.

BLH9

que $0 \leq a(z) \leq R(z)$. Si les conditions aux limites et les conditions initiales sont compatibles, i. e. si $a_1(0) = a_0(0)$, le problème (79) admet une solution régulière unique $t \in]0, \tau[$, avec $\tau > 0$. Comme F est convexe/concave la solution entropique est calculable par la méthode des caractéristiques, en utilisant le problème de Riemann. Pour les détails voir

P. Concus and W. Proskurowski, *Numerical Solution of a Nonlinear Hyperbolic Equation by the Random Choice Method*, J. Comp. Physics, Vol. 30 (1979), p. 153 -166.
En présence de la gravité le calcul se complique. Nous trouvons

BLH10

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial t} (\pi R^2(z) s(z, t)) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{s^2(1 - 2M) + 2Ms}{s^2(1 - M) + M} \left(Q(t) + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{\varrho_1 R^4(z) g \pi}{4\eta_1} \left(s(1 - 2Ms) + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} M(1 - s)^2 \right) \right) - \right. \\
 \left. \pi g \frac{s R^4(z) \varrho_1}{4\eta_1} \left(2Ms \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right) \ln \frac{1}{s} + s \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{2M\varrho_2}{\varrho_1} (1 - s) \right) \right) = 0. \quad \text{in }]0, L[\times]0, T[, \\
 s(z, t = 0) = a_0^2(z) / R^2(z) \quad \text{in }]0, L[, \\
 s(z = 0, t) = a_1^2(t) / R^2(0) \quad \text{in }]0, T[
 \end{array} \right. \quad (81)$$

BLH11

Pour les détails voir

A.Mikelić, L.Paoli : On the derivation of the Buckley- Leverett model from the two fluid Navier- Stokes equations in a thin domain, *Computational Geosciences*, Vol. 1 (1997), p. 59- 83., *Erratum* , Vol 4 (2000), p. 99-101.

BLH11

Pour les détails voir

A.Mikelić, L.Paoli : On the derivation of the Buckley- Leverett model from the two fluid Navier- Stokes equations in a thin domain, *Computational Geosciences*, Vol. 1 (1997), p. 59- 83., *Erratum* , Vol 4 (2000), p. 99-101.

L'analyse numérique détaillée du problème (81) (i.e. de l'équation de Buckley-Leverett en présence de la gravité) a été développée par W. Proskurowski, J. Jaffré et al. Voir

E.F. Kaasschieter : Solving the Buckley-Leverett equation with gravity in a heterogeneous porous medium, *Computational Geosciences*, Vol. 3 (1999), p. 23- 48.

Resumé

En utilisant l'analyse asymptotique on a obtenu la célèbre équation de Buckley-Leverett pour la saturation s , correspondant à la position de la frontière libre entre les phases :

$$\frac{\partial}{\partial t} s(z, t) + \frac{Q(t)}{\pi R^2} \frac{\partial}{\partial z} F(s) = 0. \text{ dans }]0, L[\times]0, T[, \quad (82)$$

$$F(s) = \frac{k_{r1}(s)/\eta_1}{k_{r1}(s)/\eta_1 + k_{r2}(s)/\eta_2} = \frac{s^2(1 - 2M) + 2Ms}{s^2(1 - M) + M} \quad (83)$$

$$k_{r1}(s) = s(s(1 - 2M) + 2M) \text{ et } k_{r2}(s) = (1 - s)^2 \quad (84)$$

où la paroi est mouillée par la 2^{nde} phase ($R \geq r > a(z, t)$)
et $s(z, t) = a^2(z, t)/R^2$ est la saturation de la 1^{ère} phase.

$M = \eta_1/\eta_2$ est le rapport entre les viscosités.

Conclusion

- Il est connu que les perméabilités relatives sont des fonctions non-négatives et monotones de la saturation, prenant valeur entre 0 et 1. Nous avons confirmé cette observation si $M < 1$ i.e. si le fluide le plus visqueux se trouve autour de la frontière du pore. La "fractional flow" courbe F a la forme de lettre S seulement si $M < 1/2$ (l'injection d'eau dans les pores saturés par l'huile). En conséquence, le résultat obtenu pour $M \geq 1/2$ n'est pas acceptable du point de vue de la physique.

Conclusion

- Il est connu que les perméabilités relatives sont des fonctions non-négatives et monotones de la saturation, prenant valeur entre 0 et 1. Nous avons confirmé cette observation si $M < 1$ i.e. si le fluide le plus visqueux se trouve autour de la frontière du pore. La "fractional flow" courbe F a la forme de lettre S seulement si $M < 1/2$ (l'injection d'eau dans les pores saturés par l'huile). En conséquence, le résultat obtenu pour $M \geq 1/2$ n'est pas acceptable du point de vue de la physique.
- Pour obtenir des perméabilités relatives physiquement correctes, on est obligé de tenir compte de la tension superficielle.
- La présence de la tension superficielle dans les pores est considéré comme un phénomène presque

Avec la tension superficielle

plus important que les effets visqueux, voir *les discussions pendant l' "European conference on mathematics of oil recovery"* , Freiberg, Allemagne, septembre 2002.

- Le problème avec **une interface donnée** en présence de la tension superficielle a été étudié dans **J.L. Auriault and E. Sanchez-Palencia**, Remarques sur la loi de Darcy pour les écoulements biphasiques en milieu poreux, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Numéro spécial " Modélisation asymptotique d'écoulements de fluides " (1986) 141-156.
Ils ont trouvé une loi de Darcy **matricielle** .

Avec la tension superficielle

plus important que les effets visqueux, voir *les discussions pendant l' "European conference on mathematics of oil recovery"* , Freiberg, Allemagne, septembre 2002.

- Le problème avec **une interface donnée** en présence de la tension superficielle a été étudié dans **J.L. Auriault and E. Sanchez-Palencia**, Remarques sur la loi de Darcy pour les écoulements biphasiques en milieu poreux, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Numéro spécial " Modélisation asymptotique d'écoulements de fluides " (1986) 141-156.
Ils ont trouvé une loi de Darcy **matricielle** .
- **Le problème complet**, dans un pore et en présence de la tension superficielle a été étudié dans

TS1

A. Mikelić : On an averaged model for the 2 fluid immiscible flow with surface tension in a thin domain, *Computational Geosciences* , Vol. 7 (2003), p. 183-196.

Le système (9) - (17) est considéré dans sa forme différentielle et la continuité de la contrainte normale sur la frontière libre est remplacée par la loi de Young-Laplace:

TS1

A. Mikelić : On an averaged model for the 2 fluid immiscible flow with surface tension in a thin domain, *Computational Geosciences* , Vol. 7 (2003), p. 183-196.

Le système (9) - (17) est considéré dans sa forme différentielle et la continuité de la contrainte normale sur la frontière libre est remplacée par la loi de Young-Laplace:

$$-\operatorname{div} (\eta^\varepsilon D(\overline{v}^\varepsilon)) + \nabla p^\varepsilon = 0 \text{ dans } \left(\Omega^\varepsilon \setminus \{ \rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t) \} \right) \quad (89)$$

$$\operatorname{div} \overline{v}^\varepsilon = 0 \text{ in } \Omega^\varepsilon \quad (90)$$

$$v_\rho^\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} v_3^\varepsilon \text{ sur } \{ \rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t) \} \quad (91)$$

$$[\overline{v}^\varepsilon] = 0 \text{ et } [D(\overline{v}^\varepsilon)] \overline{n} \overline{\tau} = 0 \text{ sur } \{ \rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t) \}, \quad (92)$$

TS2

$$\begin{aligned} -[p^\varepsilon] + [\eta^\varepsilon D(\vec{v}^\varepsilon)] \vec{n} \vec{n} &= \gamma \left(\frac{1}{R_{zr}} + \frac{1}{R_{n\theta}} \right) = \\ -\gamma \varepsilon \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial z^2} \left(1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 \right)^{-3/2} &\quad \text{sur } \{ \rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t) \}, \end{aligned} \quad (93)$$

TS2

$$- [p^\varepsilon] + [\eta^\varepsilon D(\vec{v}^\varepsilon)] \vec{n} \vec{n} = \gamma \left(\frac{1}{R_{zr}} + \frac{1}{R_{n\theta}} \right) =$$
$$-\gamma \varepsilon \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial z^2} \left(1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 \right)^{-3/2} \quad \text{sur } \{ \rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t) \}, \quad (94)$$

où $[\cdot]$ est le saut,

$$\vec{n} = \left(1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 \right)^{-1/2} \vec{e}_\rho - \varepsilon \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \left(1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 \right)^{-1/2} \vec{e}_z$$
$$\text{et } \vec{\tau} = - \left(1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 \right)^{-1/2} \vec{e}_z - \varepsilon \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \left(1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 \right)^{-1/2} \vec{e}_\rho$$

sont, respectivement, la normale et la tangent unitaires,
pour la surface libre axi-symétrique

TS3

$\rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t)$, $R_{z\rho}$ et $R_{n\theta}$ sont les rayons principaux de courbure et γ est la tension superficielle. La géométrie est comme dans la dérivation de l'équation de Buckley-Leverett.

TS3

$\rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t)$, $R_{z\rho}$ et $R_{n\theta}$ sont les rayons principaux de courbure et γ est la tension superficielle. La géométrie est comme dans la dérivation de l'équation de Buckley-Leverett. Les conditions aux limites et les conditions initiales sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{les composantes tangentielles de } \vec{v}^\varepsilon \text{ sont zéro sur} \\ (\Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{out}^\varepsilon) \times]0, T[\\ \vec{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \bar{\Gamma}_0^\varepsilon \times]0, T[, \\ v_3^\varepsilon = \varepsilon^3 u_{00}(\rho/\varepsilon, t) \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[; v_3^\varepsilon = \varepsilon^3 u_{0L}(\rho/\varepsilon, t) \text{ sur } \Gamma_{out}^\varepsilon \times]0, T[\\ \frac{Q(t)}{2\pi} = \int_0^R u_{00}(r, t) r dr = \int_0^R u_{0L}(r, t) r dr > 0 \text{ sur }]0, T[\\ \eta^\varepsilon = \eta_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \text{ et } \varrho^\varepsilon = \varrho_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \end{array} \right. \quad (96)$$

TS4

L'existence d'une solution pour (85) - (95) est étudié dans l'article

N. Tanaka , Global Existence of Two Phase Non-homogeneous Viscous Incompressible Fluid Flow, *Commun. in Partial Differential Equations*, 18(1993) 41-81.

TS4

L'existence d'une solution pour (85) - (95) est étudié dans l'article

N. Tanaka , Global Existence of Two Phase Non-homogeneous Viscous Incompressible Fluid Flow, *Commun. in Partial Differential Equations*, 18(1993) 41-81.

Tanaka a montré que pour des petits données il existe une solution régulière $a^\varepsilon \in C([0, T]; H^3(0, L))$,

$\vec{v}^\varepsilon \in C([0, T], H^{5/2}(\Omega^\varepsilon \setminus \{\rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t)\}))$ and

$p^\varepsilon \in C([0, T], H^{3/2}(\Omega^\varepsilon \setminus \{\rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t)\}))$ pour notre problème.

TS5

Comme avant, nous avons les estimations a priori suivants:

TS5

Comme avant, nous avons les estimations a priori suivants:

Proposition 2 Soit $\{\vec{v}^\varepsilon, p^\varepsilon, \eta^\varepsilon\}$ une solution pour le problème (85) - (95). Alors on a :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\vec{v}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \leq C\varepsilon^4, \quad (101)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\nabla \vec{v}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \leq C\varepsilon^3. \quad (102)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|p^\varepsilon\|_{L_0^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2, \quad (103)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\nabla p^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega^\varepsilon)} \leq C\varepsilon^3. \quad (104)$$

TS6

Après le passage au problème dilaté, nous avons les estimations a priori suivants:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\{ \|\vec{v}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^3} + \left\| \frac{\partial}{\partial r} \vec{v}(\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial z} \vec{v}(\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \right\} \leq C\varepsilon \quad (105)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|p(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \quad (106)$$

TS6

Après le passage au problème dilaté, nous avons les estimations a priori suivants:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\{ \|\vec{v}(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^3} + \left\| \frac{\partial}{\partial r} \vec{v}(\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial z} \vec{v}(\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \right\} \leq C\varepsilon \quad (107)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|p(\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \quad (108)$$

Soit $\tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$. (l'échelle du temps adaptée à la vitesse caractéristique). Les estimations a priori impliquent les développements asymptotiques suivants :

TS7

$$\vec{v}(\varepsilon)(r, z, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^{i+3} v^i(r, z, \tau), \quad (109)$$

$$p(\varepsilon)(r, z, t) = \varepsilon p^0(z, \tau) + \sum_{i \geq 1} \varepsilon^{i+1} p^i(r, z, \tau), \quad (110)$$

$$\eta(\varepsilon)(r, z, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \eta^i(r, z, \tau), \quad (111)$$

$$a(\varepsilon)(z, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i a_i(z, \tau). \quad (112)$$

TS7

$$\vec{v}(\varepsilon)(r, z, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^{i+3} v^i(r, z, \tau), \quad (113)$$

$$p(\varepsilon)(r, z, t) = \varepsilon p^0(z, \tau) + \sum_{i \geq 1} \varepsilon^{i+1} p^i(r, z, \tau), \quad (114)$$

$$\eta(\varepsilon)(r, z, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \eta^i(r, z, \tau), \quad (115)$$

$$a(\varepsilon)(z, t) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i a_i(z, \tau). \quad (116)$$

Le problème bifluide à 2-échelles

Après l'insertion des développements (109)-(112) dans les équations dilatés, on trouve que $v_\rho^0 = 0$, $v_\theta^j = 0$, $\forall j$ et

TS8

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} + v_3^0 \frac{\partial a}{\partial z} - v_\rho^1 + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0. \quad (117)$$

L'approximation d'ordre zéro est :

TS8

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} + v_3^0 \frac{\partial a}{\partial z} - v_\rho^1 + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0. \quad (122)$$

L'approximation d'ordre zéro est :

$$\frac{\partial v_3^0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\rho^1) = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \quad (123)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta^0 r}{2} \frac{\partial v_3^0}{\partial r} \right) - \frac{\partial p^0}{\partial z} = 0 \text{ dans } \left(\Omega \setminus \{r = a(z, t)\} \right) \times]0, T[, \quad (124)$$

$$\frac{\partial p^0}{\partial r} = 0 \text{ in } \left(\Omega \setminus \{r = a(z, t)\} \right) \times]0, T[\quad (125)$$

$$-\left[p^0 \right] = -\gamma \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \text{ dans } \{r = a(z, t)\} \times]0, T[, \quad (126)$$

TS9

$$\left[\eta^0 \frac{\partial v_3^0}{\partial r} \right] = 0 \quad \text{sur} \quad \{r = a(z, t)\} \times]0, T[, \quad (127)$$

$$\left[v_3^0 \right] = 0 \quad \text{and} \quad \left[v_\rho^1 \right] = 0 \quad \text{sur} \quad \{r = a(z, t)\} \times]0, T[\quad (128)$$

$$v_\rho^1 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[, \quad (129)$$

$$v_3^0 = \begin{cases} 0 & \text{sur} \Gamma_0 \times]0, T[, \\ u_{00} & \text{sur} \Gamma_{in} \times]0, T[, \\ u_{0L} & \text{sur} \Gamma_{out} \times]0, T[, \end{cases} \quad (130)$$

$$\eta^0 = \eta_{in} \in \{\eta_1, \eta_2\} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{in} \times]0, T[, \quad (131)$$

$$\eta^0(r, z, 0) = \eta_0(r, z) \in \{\eta_1, \eta_2\} \quad (132)$$

TS10

Pour la vitesse axiale efficace nous trouvons:

$$v_3^0(r, z, t) = -\frac{dp_2^0}{dz}(z, t) \frac{R^2 - r^2}{2\eta_2} + \frac{a^2}{\eta_2} \frac{\partial}{\partial z} [p^0] \ln \frac{R}{r}, \quad a < r < R \quad (133)$$

$$v_3^0(r, z, t) = \frac{dp_1^0}{dz} \left\{ \frac{r^2 - a^2}{2\eta_1} - \frac{R^2 - a^2}{2\eta_2} \right\} + \left\{ \frac{a^2}{\eta_2} \ln \frac{R}{a} - \frac{R^2 - a^2}{2\eta_2} \right\} \frac{\partial}{\partial z} [p^0], \quad 0 < r < a. \quad (134)$$

$$-\frac{dp_1^0}{dz} = \frac{4Q(t)}{\pi} \frac{\eta_2}{(M-1)a^4 + R^4} + \frac{(R^2 - a^2)^2}{(M-1)a^4 + R^4} \frac{\partial}{\partial z} [p^0], \quad (135)$$

où $M = \eta_2/\eta_1$.

TS11

Pour la saturation $s = a^2(z, t)/R^2(z)$ nous avons l'équation parabolique dégénérée suivante:

$$\frac{\partial s(z, t)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{sQ(t)}{\pi R^2} \frac{(1 - 2M)s + 2M}{(1 - M)s^2 + M} + \frac{\gamma R^3 s^2}{4\mu_2} \frac{\partial^3(\sqrt{s})}{\partial z^3} \cdot \left(2s^2 \ln 1/s - (1 - s)(3s - 1) - 2M(1 - s)((1 + s) \ln s + 2(1 - s)) \right) \cdot \frac{1}{(1 - M)s^2 + M} \right\} = 0 \quad (136)$$

TS11

Pour la saturation $s = a^2(z, t)/R^2(z)$ nous avons l'équation parabolique dégénérée suivante:

$$\frac{\partial s(z, t)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{sQ(t)}{\pi R^2} \frac{(1 - 2M)s + 2M}{(1 - M)s^2 + M} + \frac{\gamma R^3 s^2}{4\mu_2} \frac{\partial^3(\sqrt{s})}{\partial z^3} \cdot \left(2s^2 \ln 1/s - (1 - s)(3s - 1) - 2M(1 - s)((1 + s) \ln s + 2(1 - s)) \right) \cdot \frac{1}{(1 - M)s^2 + M} \right\} = 0 \quad (137)$$

Si $M > 2$, la fonction " fractional flow "

$$s \rightarrow \frac{(M - 2)s^2 + 2s}{(M - 1)s^2 + 1}$$

TS12

est strictement monotone sur $(0, 1)$ est a la forme de lettre S.

L'équation (136) est une équation d'ordre 4 en z . Les fonctions $-2s^2 \ln s - (1 - s)(3s - 1)$ et $-2(1 - s)((1 + s) \ln s + 2(1 - s))$ sont strictement positives et monotone décroissantes sur $[0, 1)$. Elles s'annulent pour $s = 0$ et $s = 1$.

TS12

est strictement monotone sur $(0, 1)$ est a la forme de lettre S.

L'équation (136) est une équation d'ordre 4 en z . Les fonctions $-2s^2 \ln s - (1 - s)(3s - 1)$ et $-2(1 - s)((1 + s) \ln s + 2(1 - s))$ sont strictement positives et monotone décroissantes sur $[0, 1)$. Elles s'annulent pour $s = 0$ et $s = 1$.

Ce résultat ne confirme pas la modélisation des effets capillaires par une équation **parabolique dégénérée d'ordre 2**.

TS13

Quand même, nous avons obtenus la loi de filtration, en présence de la tension superficielle:

$$\begin{cases} q_a = -k \left(\frac{k_{ra}^a}{\mu_a} \frac{\partial p_a}{\partial z} + \frac{k_{ra}^b}{\mu_b} \frac{\partial p_b}{\partial z} \right) \\ q_b = -k \left(\frac{k_{rb}^a}{\mu_a} \frac{\partial p_a}{\partial z} + \frac{k_{rb}^b}{\mu_b} \frac{\partial p_b}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (138)$$

TS13

Quand même, nous avons obtenus la loi de filtration, en présence de la tension superficielle:

$$\begin{cases} q_a = -k \left(\frac{k_{ra}^a}{\mu_a} \frac{\partial p_a}{\partial z} + \frac{k_{ra}^b}{\mu_b} \frac{\partial p_b}{\partial z} \right) \\ q_b = -k \left(\frac{k_{rb}^a}{\mu_a} \frac{\partial p_a}{\partial z} + \frac{k_{rb}^b}{\mu_b} \frac{\partial p_b}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (139)$$

avec $\mu_a = \eta_1$, $\mu_b = \eta_2$, $p_a = p_1$, $p_b = p_2$,

$$q_a = q_1 = 2\pi \int_0^a r v_3^0 dr, \quad q_b = q_2 = 2\pi \int_a^R r v_3^0 dr \quad \text{et on a (138)}$$

avec

TS14

$$k = \frac{R^4(z)\pi}{4}, \quad \frac{k_{ra}^a}{\mu_a} = \frac{s^2}{\eta_1} \left(1 + \frac{2}{M} \ln \frac{1}{s} \right)$$

$$\frac{k_{ra}^b}{\mu_b} = -\frac{2s}{\eta_2} \left(s \ln \frac{1}{s} - 1 + s \right) = \frac{k_{rb}^a}{\mu_a} \geq 0$$

$$\frac{k_{rb}^b}{\mu_b} = \frac{1}{\eta_2} \left(2s^2 \ln \frac{1}{s} + 3s^2 - 4s + 1 \right)$$

TS14

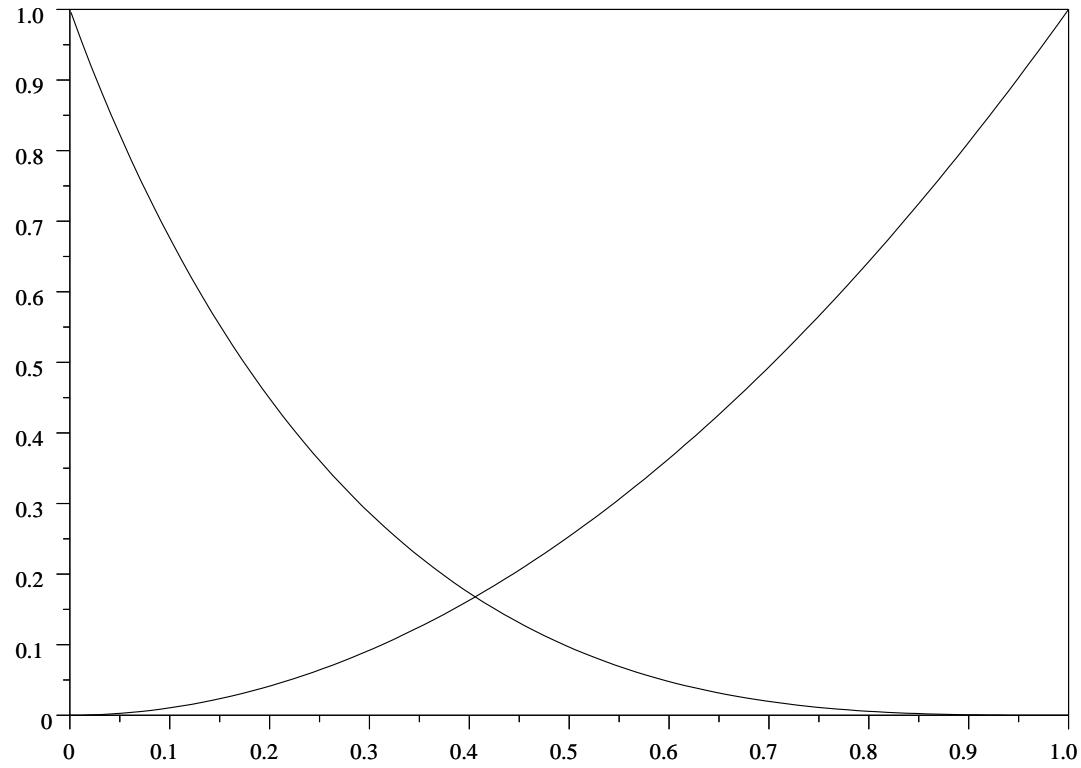
$$k = \frac{R^4(z)\pi}{4}, \quad \frac{k_{ra}^a}{\mu_a} = \frac{s^2}{\eta_1} \left(1 + \frac{2}{M} \ln \frac{1}{s} \right)$$

$$\frac{k_{ra}^b}{\mu_b} = -\frac{2s}{\eta_2} \left(s \ln \frac{1}{s} - 1 + s \right) = \frac{k_{rb}^a}{\mu_a} \geq 0$$

$$\frac{k_{rb}^b}{\mu_b} = \frac{1}{\eta_2} \left(2s^2 \ln \frac{1}{s} + 3s^2 - 4s + 1 \right)$$

Notons que la forme des lois de Darcy phasiques correspond aux observations par Kalaydjian et Marle
F. Kalaydjian, C.M. Marle , dans " *Microscopic Flow and Generalized Darcy's Equations, The Mathematics of Oil Recovery* ", ed. par P.R. King, Clarendon Press, Oxford, 1992, 495 - 514.

TS15



TS16

Il est surprenant que l'équation pour la saturation soit d'ordre 4, mais notons que la courbure

$\varepsilon \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial z^2} \left(1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \right|^2\right)^{-3/2}$ est souvent supposée constante dans les articles pétroliers. Sous cette hypothèse notre équation deviendra aussi d'ordre 2.

TS16

Il est surprenant que l'équation pour la saturation soit d'ordre 4, mais notons que la courbure

$\varepsilon \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial z^2} \left(1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \right|^2\right)^{-3/2}$ est souvent supposée constante dans les articles pétroliers. Sous cette hypothèse notre équation deviendra aussi d'ordre 2. Notons que la prise de la moyenne donne

$$p_a - p_b = (\gamma_{ab} - \gamma_{ba}) \frac{\partial A_{as}}{\partial(\Phi S_a)} + \gamma_{ab} \frac{\partial A_{ab}}{\partial(\Phi S_b)} + \Pi \frac{\partial(\Phi S_a)}{\partial t}$$

où $\Pi \geq 0$ est un paramètre, A_{ab} est l'aire interfaciel macroscopique entre les phases a and b , A_{as} est l'aire interfaciel macroscopique entre la phase a et la phase solide et γ est la tension superficielle.

TS16

Pour les détails voir

D. Pavone , in " *Equations for Two-Phase Flow in Porous Media Derived from Space Averaging, The Mathematics of Oil Recovery* " , ed. by P.R. King, Clarendon Press, Oxford, 1992, 199- 210.

Dans notre situation, il n y a pas de contact entre la phase a et le solide, $\Pi = 0$, et nous trouvons que

$$p_a - p_b = 2\gamma_{ab} \left(1/R + 1/R' \right) \Rightarrow \text{notre résultat.}$$

La cas non-saturé

Pour étudier le cas non-saturé, nous supposons la même géométrie. Le fluide 1 est l'air à la pression p_{air} qui n'interagisse pas avec l'écoulement. Nous avons à nouveau le système (85)-(93), mais les conditions cinématiques et dynamiques de la frontière libre sont remplacées par

La cas non-saturé

Pour étudier le cas non-saturé, nous supposons la même géométrie. Le fluide 1 est l'air à la pression p_{air} qui n'interagisse pas avec l'écoulement. Nous avons à nouveau le système (85)-(93), mais les conditions cinématiques et dynamiques de la frontière libre sont remplacées par

$$D(\vec{v}^\varepsilon)] \vec{n} \vec{\tau} = 0 \text{ sur } \{\rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t)\}, \quad (142)$$

$$- [p^\varepsilon] + \eta^\varepsilon D(\vec{v}^\varepsilon) \vec{n} \vec{n} = \gamma \left(\frac{1}{R_{zr}} + \frac{1}{R_{n\theta}} \right) =$$
$$-\gamma \varepsilon \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial z^2} \left(1 + \varepsilon^2 \left| \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 \right)^{-3/2} \text{ sur } \{\rho = \varepsilon a^\varepsilon(z, t)\}, \quad (143)$$

Nsat1

Les conditions aux limites sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{les composantes tangentielles de } \vec{v}^\varepsilon \text{ sont zéro sur} \\ (\Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{out}^\varepsilon) \times]0, T[\\ \vec{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \bar{\Gamma}_0^\varepsilon \times]0, T[, \\ p^\varepsilon = p_0(t) \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[\text{ et } p^\varepsilon = p_1(t) \text{ sur } \Gamma_{out}^\varepsilon \times]0, T[, \\ \eta^\varepsilon = \eta_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \text{ et } \varrho^\varepsilon = \varrho_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \end{array} \right. \quad (144)$$

Nsat1

Les conditions aux limites sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{les composantes tangentielles de } \vec{v}^\varepsilon \text{ sont zéro sur} \\ (\Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{out}^\varepsilon) \times]0, T[\\ \vec{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \bar{\Gamma}_0^\varepsilon \times]0, T[, \\ p^\varepsilon = p_0(t) \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[\text{ et } p^\varepsilon = p_1(t) \text{ sur } \Gamma_{out}^\varepsilon \times]0, T[, \\ \eta^\varepsilon = \eta_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \text{ et } \varrho^\varepsilon = \varrho_{in}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \times]0, T[, \end{array} \right. \quad (146)$$

où $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{out}^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_0^\varepsilon$ est la frontière de Ω_ε ,
 $\Gamma_{in}^\varepsilon =]0, \varepsilon R(0)[\times]0, 2\pi[\times \{0\}$ et $\Gamma_{out}^\varepsilon =]0, \varepsilon R(L)[\times]0, 2\pi[\times \{L\}$.

L'analyse multiéchelle donne:

$$v_3^0(r, z, t) = -\frac{1}{\eta_2} \frac{\partial p^0}{\partial z} \left(\frac{R^2 - r^2}{2} - a^2 \ln \frac{R}{r} \right) \quad (147)$$

Nsat2

Avec $c = 1 - a^2/R^2$, le débit devient

$$\int_0^a v_3^0(r, z, t) r \, dr = -\frac{R^4}{8\eta_2} \frac{\partial p^0}{\partial z} \left(c(3c - 2) + 2(1 - c)^2 \ln \frac{1}{1 - c} \right) \quad (148)$$

Comme avant, l'équation pour c est

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{R^2}{4\eta_2} \left(\frac{\partial p^0}{\partial z} \left(c(3c - 2) + 2(1 - c)^2 \ln \frac{1}{1 - c} \right) \right) \quad (149)$$