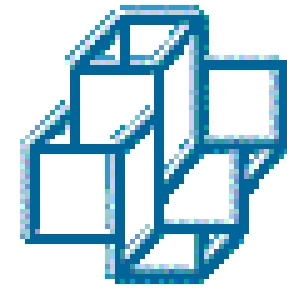


LEMTA



LNCC

**Electro-chimio-hydro-mécanique de l'argile
vue comme un milieu à trois échelles : micro / méso / macro**

Christian MOYNE, Didier STEMMELEN, Thibault LEMAIRE

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée

CNRS – INPL – UHP (UMR 7563)

2, avenue de la Forêt de Haye, 54504 Vandœuvre lès Nancy, France

Márcio ARAB MURAD

Laboratório Nacional de Computação Científica

Avenida Getúlio Vargas, 333

25651-070 Petrópolis, RJ, Brazil

Plan

1. Introduction aux argiles gonflantes

1.1. Structure des argiles gonflantes

1.2. Organisation générale : milieu à trois échelles

2. De la microéchelle à mésoéchelle

2.1. Equations à résoudre

2.2. Procédure d'homogénéisation

2.3. Equations à la mésoéchelle

3. De la mésoéchelle à la macroéchelle

3.1. Equations pour le bulk

3.2. Modèle à double porosité

3.3. Modèle à trois échelles quasi permanent

4. Conclusion

1. Une brève introduction aux argiles gonflantes

1.1. Structure des argiles gonflantes



Smectite à l'échelle mésoscopique (d'après D. Teissier)

1.2. Organisation générale : milieu à trois échelles

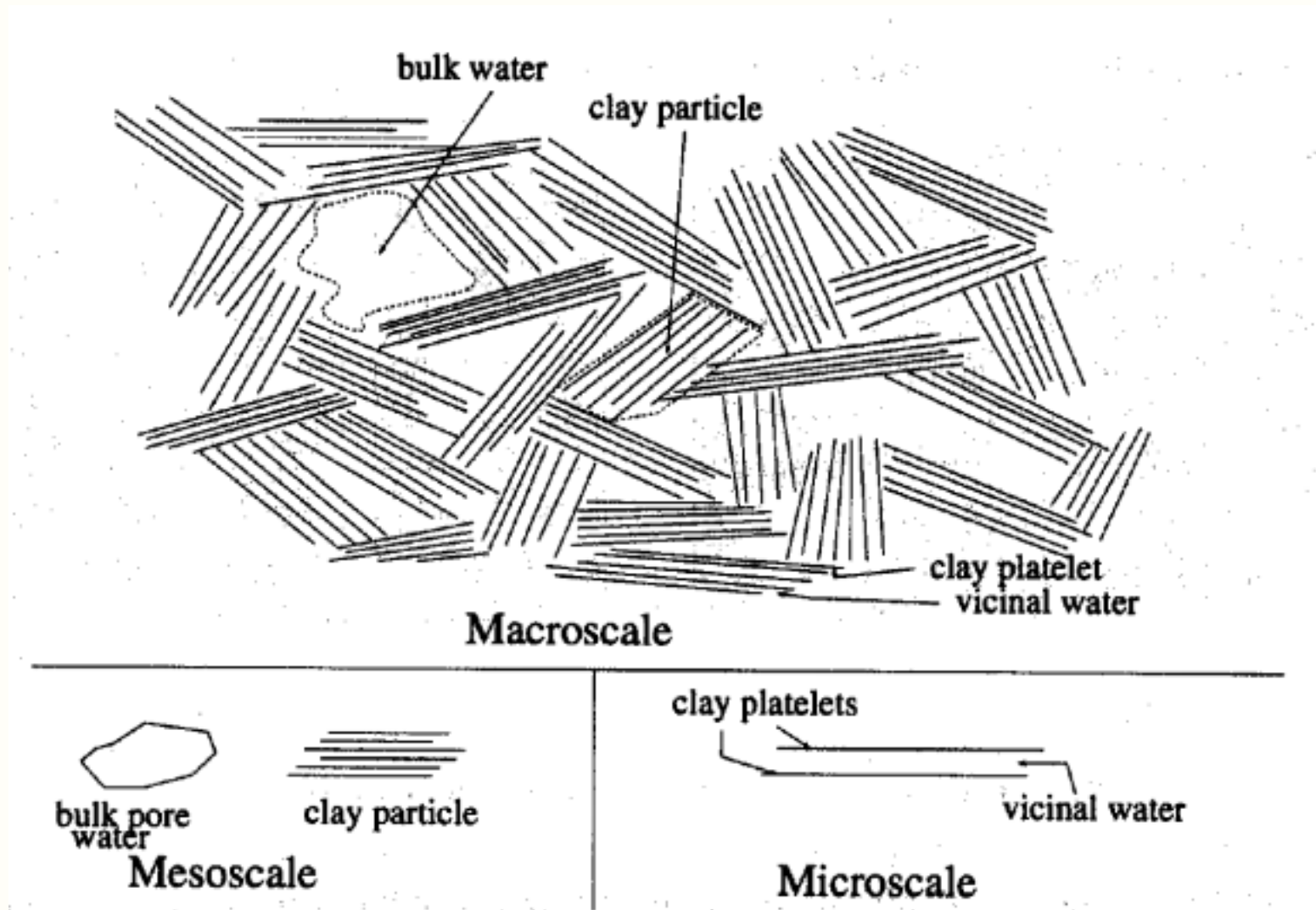


Fig. 1. Three-scale model for clay.

Microstructure de l'argile

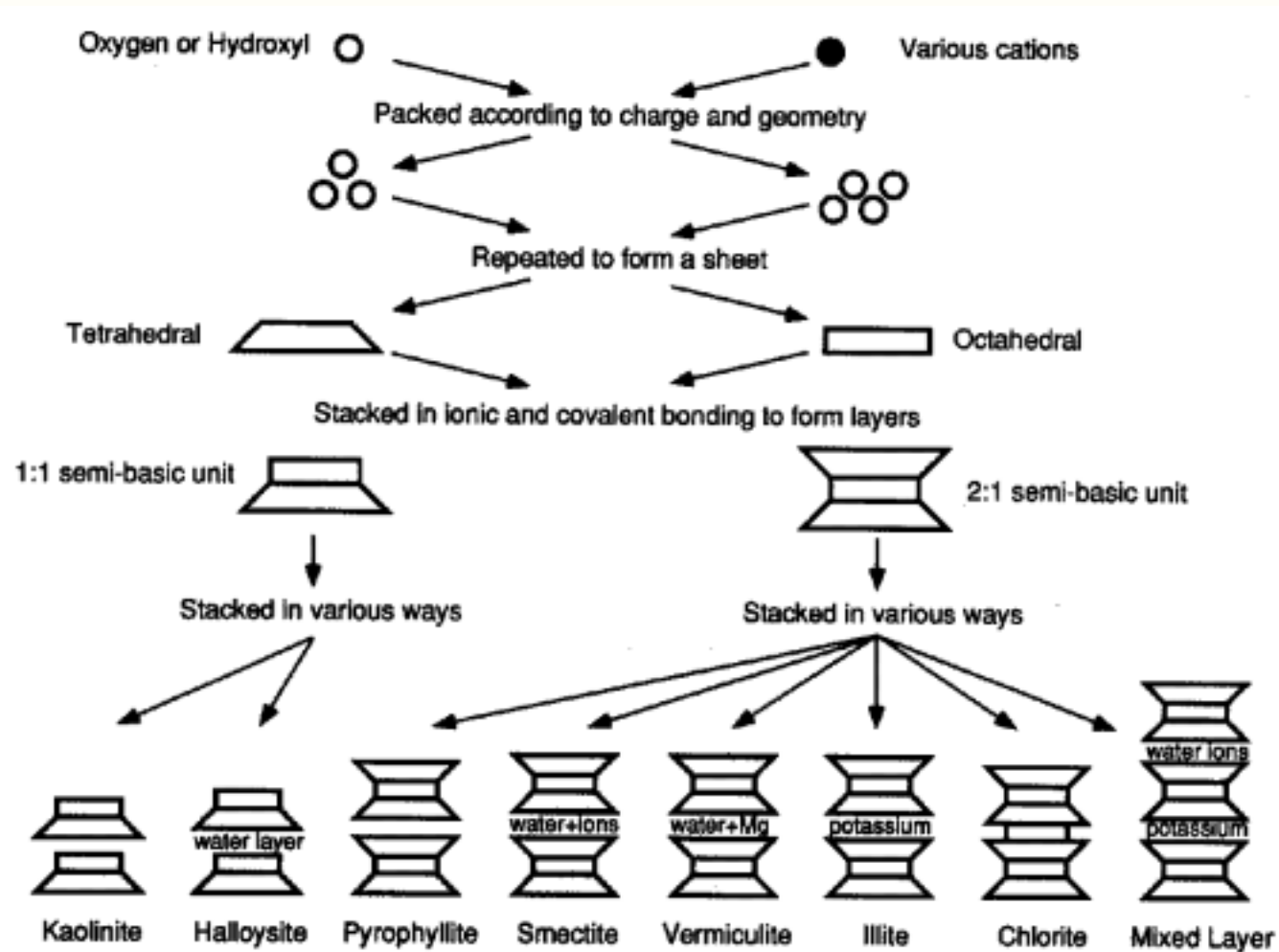
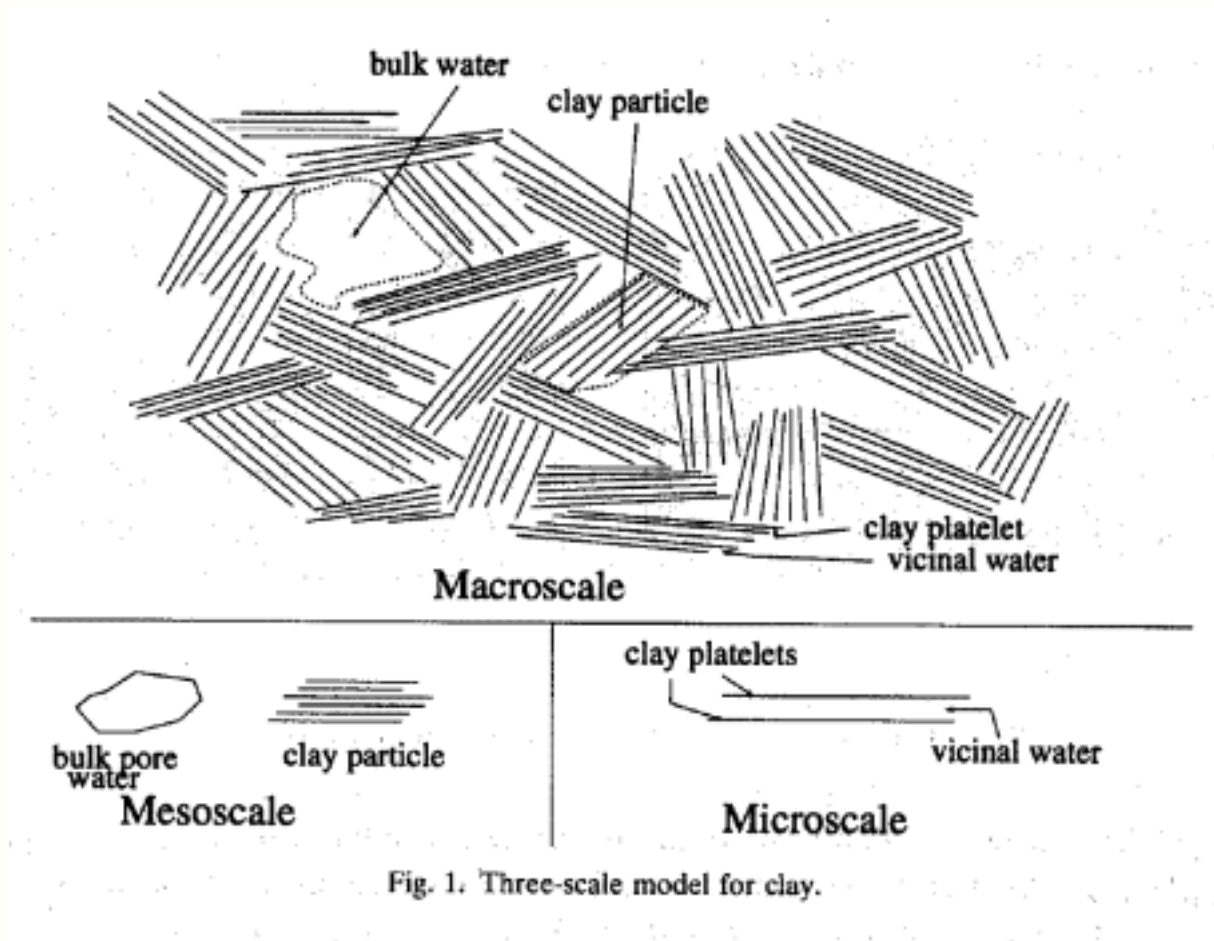


Figure 3.8 Synthesis pattern for the clay minerals.

- **Substitutions isomorphes :** \Rightarrow Densité surfacique de charge négative ($\sigma < 0$)

2. De la microéchelle à la mésoéchelle



“Mésoméchelle” ← “Microéchelle”

- **Hypothèses**

- * **Milieu poreux** : saturé par un fluide newtonien
- * **Sel monovalent** : Na^+ , Cl^-
- * **Gonflement osmotique** : forces électrostatiques prédominantes
- * **Phase solide** : élastique

- **Inconnues**

Vitesse du fluide	\mathbf{v}	Pression	p	
Potentiel électrique	Φ	Cations	c^+	Anions c^-
Déplacement solide	\mathbf{u}			

- **Changement de variables**

- * **Solution \rightleftharpoons Bulk**

solution	bulk
c^+, c^-	c_b
Φ	ψ_b
p	p_b

$$\Phi = \underbrace{\varphi}_{\text{double couche}} + \underbrace{\psi_b}_{\text{courant}}$$

$$c^\pm = c_b \exp\left(\mp \frac{F \varphi}{RT}\right)$$

- * **Pression du bulk**

$$p_b = p - \underbrace{2RT \left(\frac{c^+ + c^-}{2} - c_b \right)}_{\text{Pression de Donnan}} = p - 2RT c_b \left[\cosh\left(\frac{F \varphi}{RT}\right) - 1 \right]$$

Pression de Donnan

- **Technique mathématique : développement multiéchelle**

- * **Milieu à deux échelles spatiales : microscopique $\ell (y)$; macroscopique $L (x)$.**

- * **Séparation des échelles : $\epsilon = \frac{\ell}{L} \ll 1$; x et y : variables indépendantes.**

- * **Milieu périodique (cellule-unité Y)**

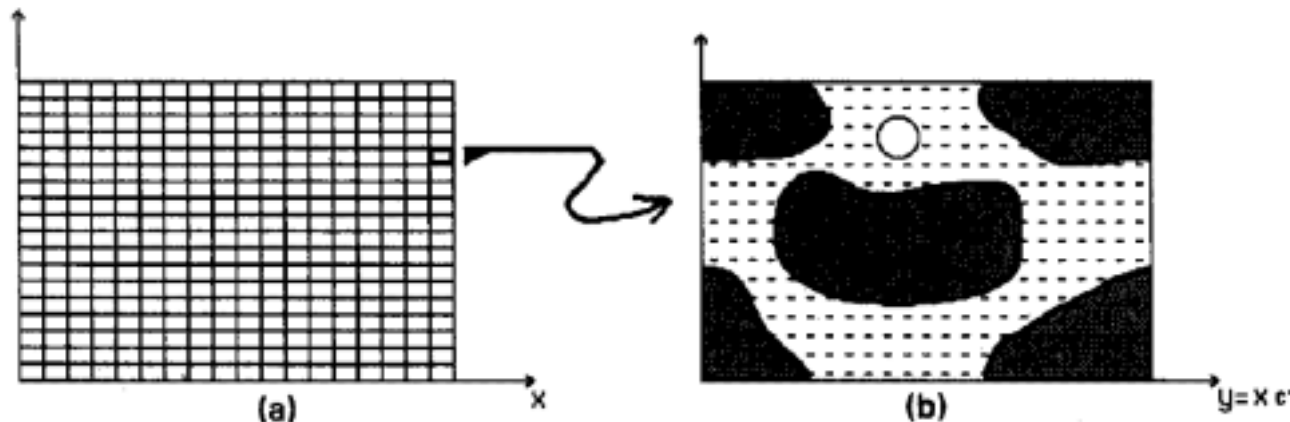


FIG. 1. (a) Macroscopic scale. (b) Microscopic scale, period Ω .

- * **Dérivée spatiale : $\nabla = \nabla_x + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y$ (L : longueur de référence)**

- * **Expansion asymptotique à deux échelles : $\theta(x, y, t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \epsilon^k \theta^k(x, y, t)$**

* **Valeurs de référence :** θ_{ref}

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_{ref}} = \mathcal{O}(1)$$

* **Mise des équations sous forme adimensionnelle**

* **Valeurs du bulk :** c_b, ψ_b, p_b

- **variables lentes :** indépendantes de y à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$.
- **continues à l'interface avec le bulk**

2.1. Equations à résoudre

- **Equation de Poisson dans Y_f**

$$\epsilon^2 \nabla^2 (\varphi + \psi_b) = -\frac{F(c^+ - c^-)}{\tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon}_0}, \quad c^\pm = c_b \exp(\mp \bar{\varphi}) \quad \text{et} \quad \bar{\varphi} = \frac{F \varphi}{RT}$$

$$\mathbf{E} = -\epsilon \nabla (\varphi + \psi_b)$$

- **Equations de Stokes dans Y_f**

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$0 = -\nabla p_b - 2RT (\cosh \bar{\varphi} - 1) \nabla c_b + 2RT c_b \sinh \bar{\varphi} \nabla \bar{\psi}_b + \epsilon^2 \mu_f \nabla^2 \mathbf{v}$$

- **Transport des ions (*) dans Y_f**

$$\frac{\partial}{\partial t} [\exp(\mp \bar{\varphi}) c_b] + \epsilon^m \nabla \cdot (\exp(\mp \bar{\varphi}) c_b \mathbf{v}) = \nabla \cdot [\mathcal{D}_\pm \exp(\mp \bar{\varphi}) (\nabla c_b \pm c_b \nabla \bar{\psi}_b)]$$

- **Déformation du solide dans Y_s**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s = 0 \quad \boldsymbol{\sigma}_s = c_s \mathcal{E}(\mathbf{u})$$

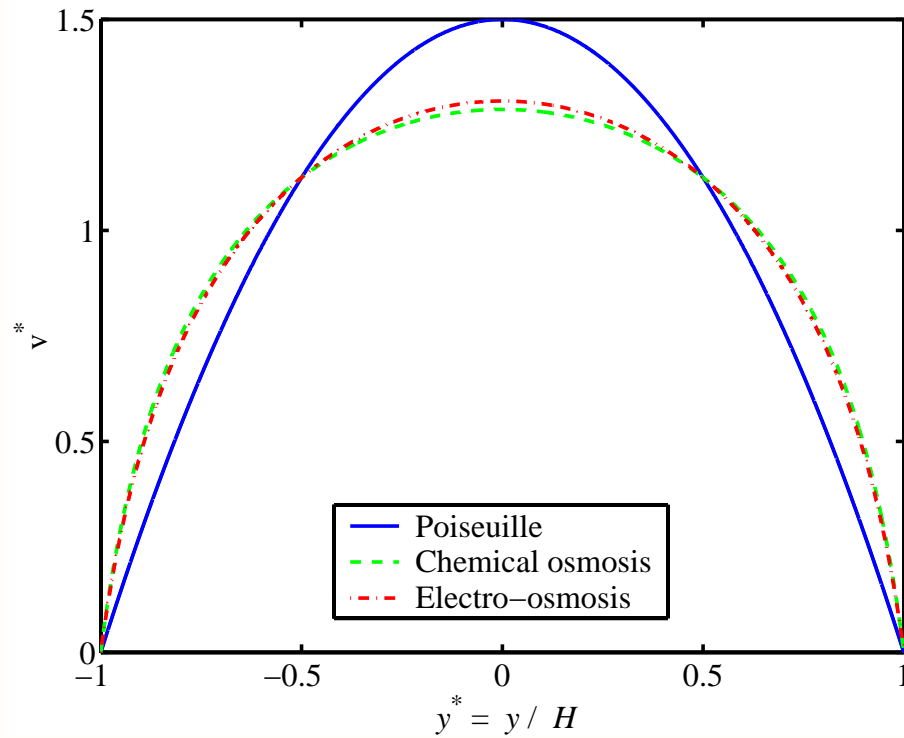
(*) **Nombre de Péclet** : $\text{Pe} = \frac{v_{ref} L}{\mathcal{D}_\pm} = \mathcal{O}(\epsilon^m)$; $m = 1$ (**diffusion**); $= 0$ (**+ convection**)

2.2. Procédure d'homogénéisation

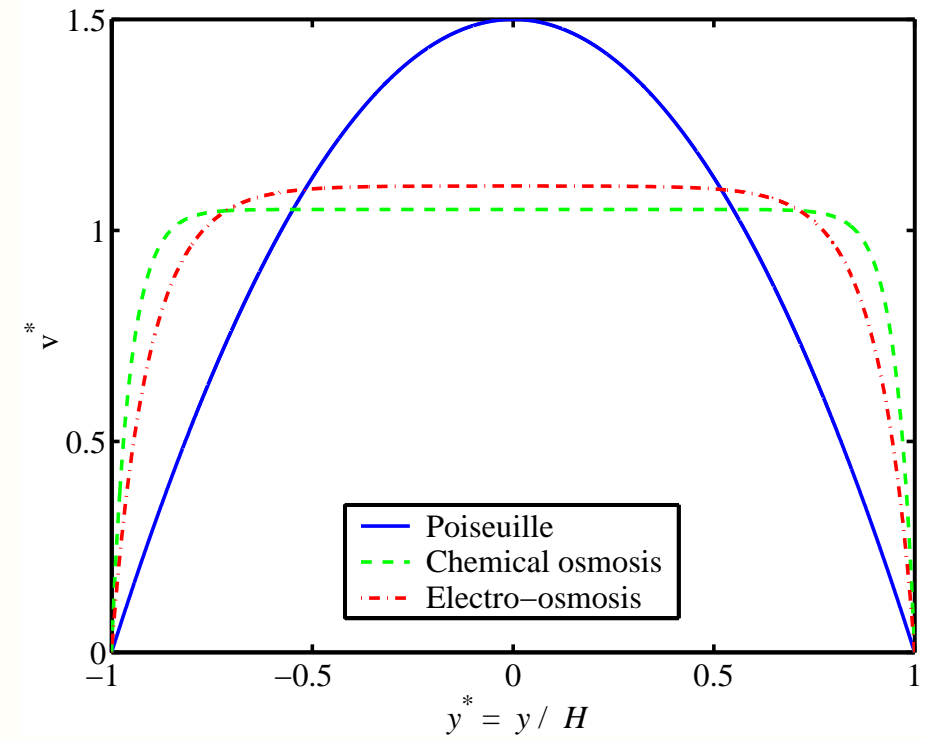
Loi de Darcy généralisée

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_D^0 \equiv \langle \mathbf{v}^0 - \partial \mathbf{u}^0 / \partial t \rangle &= \overbrace{\langle \mathbf{v}_p^0 - \partial \mathbf{u}^0 / \partial t \rangle}^{\text{Darcy}} + \overbrace{\langle \mathbf{v}_c^0 \rangle}^{\text{osmose chimique}} + \overbrace{\langle \mathbf{v}_e^0 \rangle}^{\text{électro-osmose}} \\
 &= -\mathbf{K}_P \nabla_x p_b^0 - \mathbf{K}_C \nabla_x c_b^0 - \mathbf{K}_E \nabla_x \bar{\psi}_b^0
 \end{aligned}$$

- **Valeur moyenne :** $\langle \theta_f \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \theta_f dY$
- **Problèmes de fermeture pour calculer K_P, K_C, K_E**
- **Exemple : 2 plaques parallèles distantes de $2H$**
 - * Profils de vitesse
 - * Coefficients K_P, K_C, K_E



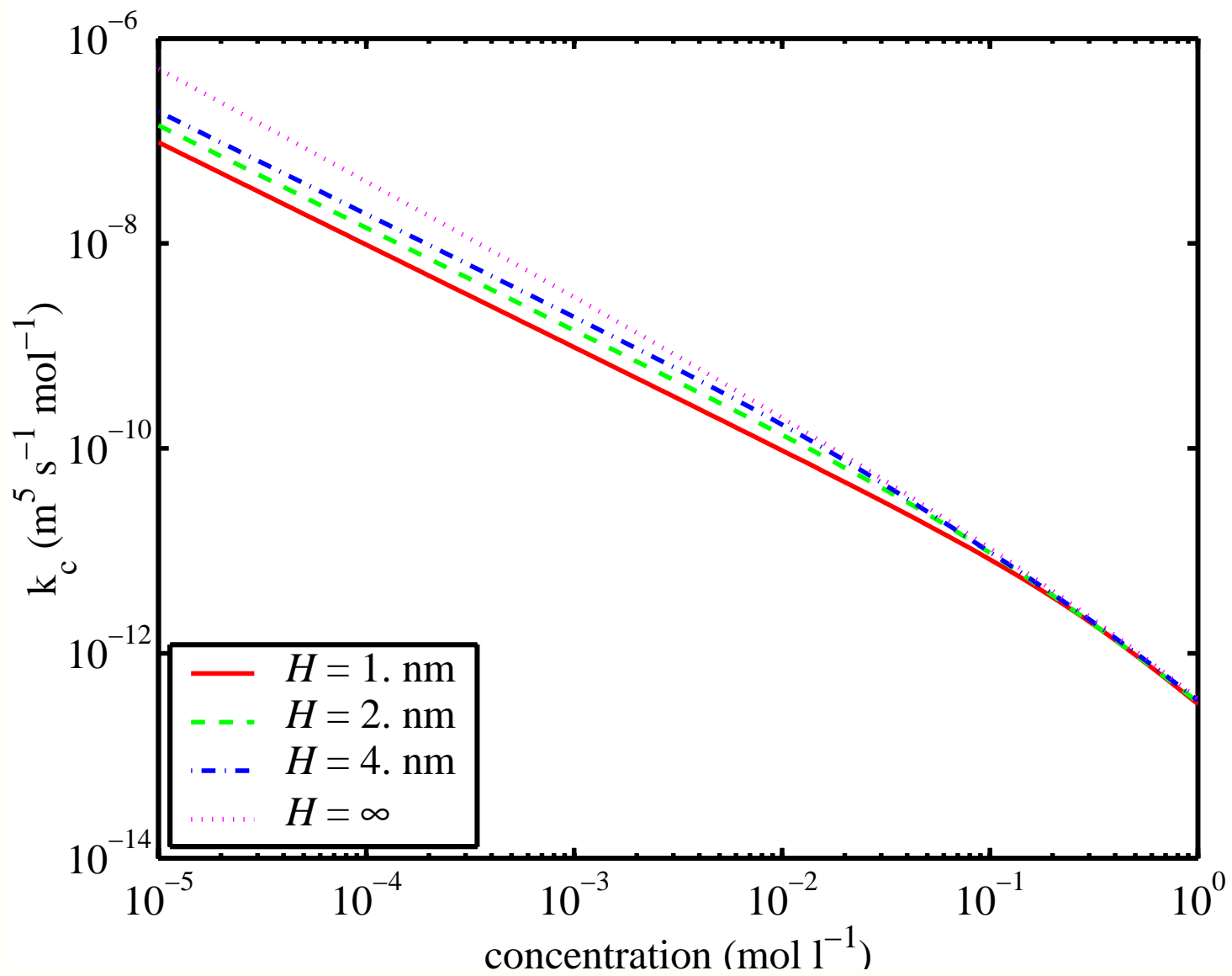
$$H/L_D = 1.$$



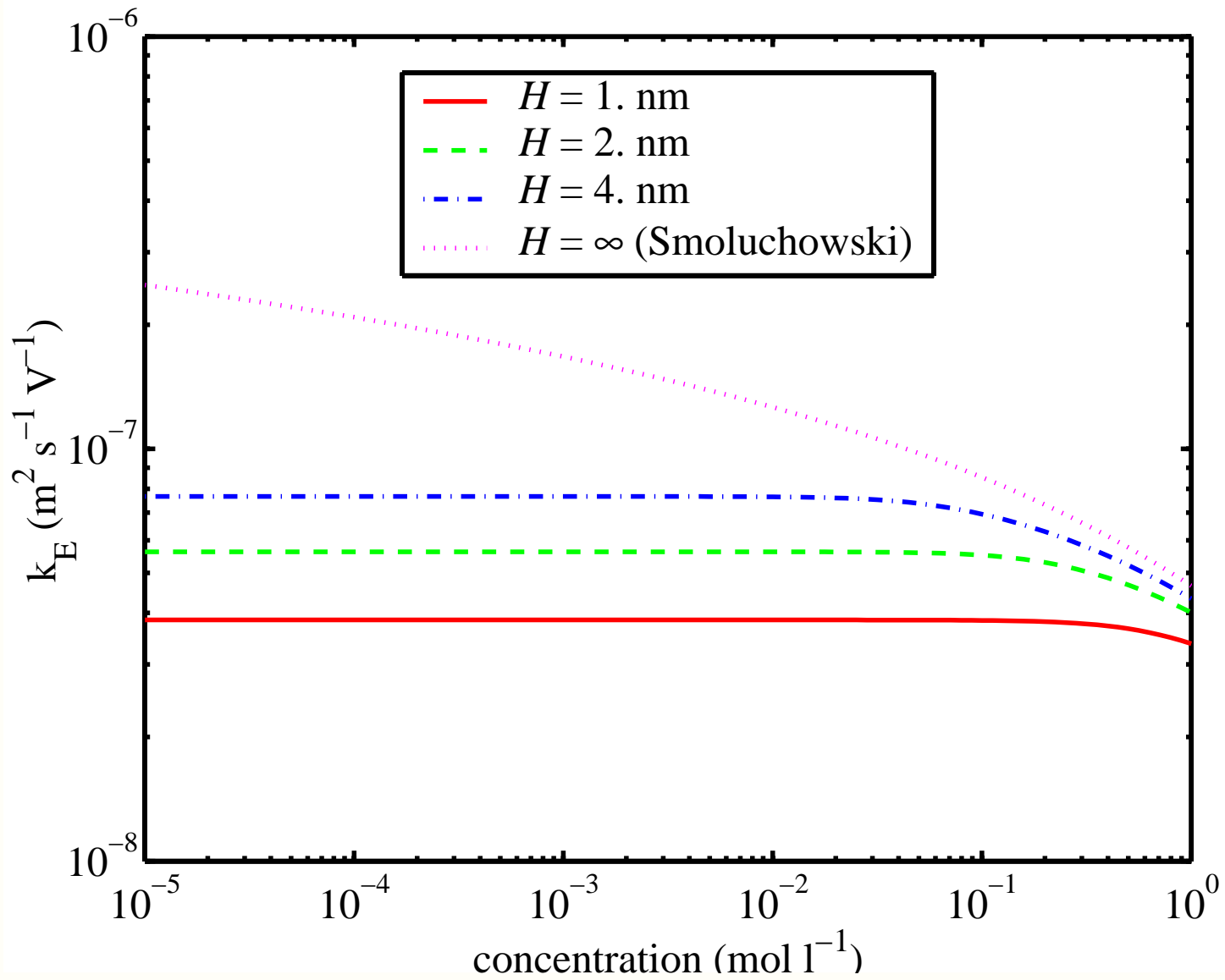
$$H/L_D = 10.$$

$$L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 RT}{2 F^2 c_b}} :$$

Longueur de Debye



Coefficient d'osmose chimique K_C



Coefficient d'électro-osmose K_E

Transport des ions

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi G_{\pm}^* c_b^0) + \nabla_x \cdot \mathbf{J}_{\pm}^0 = 0$$

avec $\mathbf{J}_{\pm}^0 \equiv G_{\pm}^* c_b^0 \mathbf{v}_{\pm}^{*0} - \phi \left(D_{\pm}^c \nabla_x c_b^0 \pm D_{\pm}^e c_b^0 \nabla_x \bar{\psi}_b^0 + D_{\pm}^p \nabla_x p_b^0 \right)$

- Problèmes de fermeture pour f^{\pm} et $h_{p,c,e}^{\pm}$

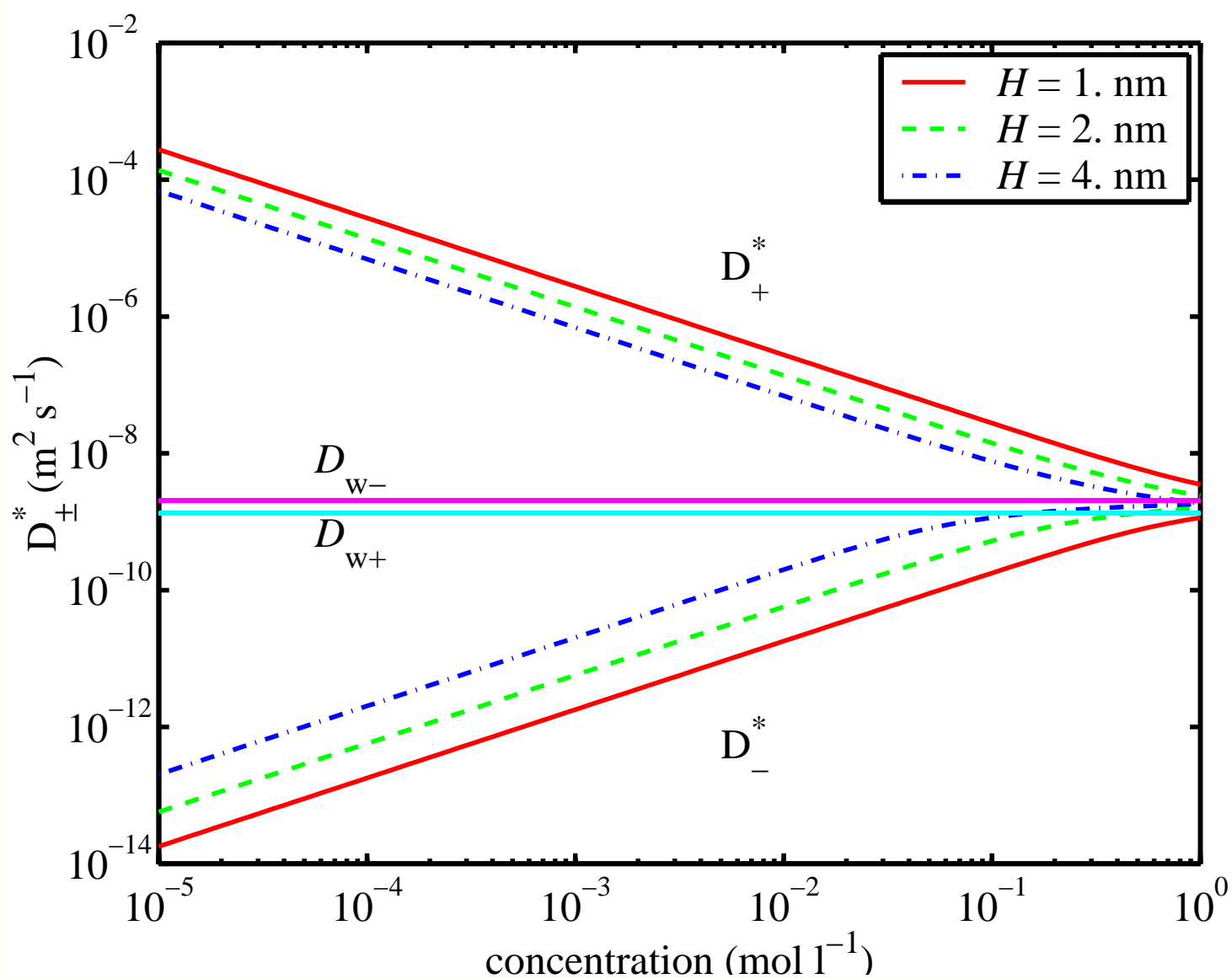
$$G_{\pm}^* = \langle \exp(\mp \bar{\varphi}^0) \rangle^f; \quad G_{\pm}^* \mathbf{v}_{\pm}^{*0} = \langle \exp(\mp \bar{\varphi}^0) \mathbf{v}^0 \rangle$$

$$D_{\pm}^p = \mathcal{D}_{\pm} \langle \exp(\mp \bar{\varphi}^0) \nabla_y h_p^{\pm} \rangle^f; \quad D_{\pm}^{c,e} = \mathcal{D}_{\pm} \langle \exp(\mp \bar{\varphi}^0) (\mathbf{I} + \nabla_y f^{\pm} + \nabla_y h_{c,e}^{\pm}) \rangle^f$$

- Exemple : deux plaques parallèles distantes de $2H$

- * $D_{\pm}^c = D_{\pm}^e$

- * $D_{\pm}^p = 0$



Coefficient de diffusion D_{\pm}

• **Formulation alternative**

$$\mathbf{J}^0 \equiv \mathbf{J}_+^0 + \mathbf{J}_-^0 \quad \mathbf{I}_e^0 \equiv F(\mathbf{J}_+^0 - \mathbf{J}_-^0) \quad \mathbf{J}^0 = 2c_b^0 \mathbf{v}_D^0 + \mathbf{J}_d^0$$

* **Relations de réciprocité de Onsager**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_D^0 \\ \mathbf{J}_d^0 \\ \mathbf{I}_e^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{PP} & L_{PC} & L_{PE} \\ L_{CP} & L_{CC} & L_{CE} \\ L_{EP} & L_{EC} & L_{EE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_x p_b^0 \\ RT \nabla_x \ln c_b^0 \\ \nabla_x \psi_b^0 \end{pmatrix}$$

* **Symétrie des coefficients ?**

Si le potentiel électrochimique ne fluctue pas au travers des micropores :

$$\begin{aligned} L_{PP} &= L_{PP}^T & L_{CC} &= L_{CC}^T & L_{EE} &= L_{EE}^T \\ L_{PC} &= L_{CP}^T & L_{PE} &= L_{EP}^T & L_{CE} &= L_{EC}^T \end{aligned}$$

Décomposition de Terzaghi modifiée

• **Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$:** $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)$

• **Ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$:**

$$\mu_s \nabla_y^2 \mathbf{u}^1 + (\lambda_s + \mu_s) \nabla_y (\nabla_y \cdot \mathbf{u}^1) = 0 \quad \text{dans } Y_s$$

$$\begin{aligned} [\lambda_s \nabla_y \cdot \mathbf{u}^1 \mathbf{I} + 2 \mu_s \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{u}^1)] \cdot \mathbf{n} &= - [p_b^0(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ &\quad + \lambda_s \nabla_x \cdot \mathbf{u}^0 \mathbf{I} + 2 \mu_s \boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0)] \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial Y_{fs} \end{aligned}$$

• **sur ∂Y_{se} :** conditions de périodicité

• **Pression de disjonction $\boldsymbol{\pi}^0$**

$$\boldsymbol{\pi}^0 = \underbrace{- \int_0^{\varphi^0} F (c^{+0} - c^{-0}) d\varphi \mathbf{I}}_{=RT(c^{+0} + c^{-0} - 2c_b^0)} - \underbrace{\frac{\tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon}_0}{2} (2 \mathbf{E}^0 \mathbf{E}^0 - (E^0)^2 \mathbf{I})}_{\boldsymbol{\tau}_M^0}$$

pression de Donnan

tenseur de Maxwell

- **Fermeture pour \mathbf{u}^1**

$$\mathbf{u}^1 = \zeta(\mathbf{y}) p_b^0(\mathbf{x}, t) + \xi(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0) + \mathbf{u}_\pi^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \hat{\mathbf{u}}^1(\mathbf{x}, t)$$

- **ζ et ξ : Homogénéisation des équations de la poroélasticité (Auriault et Sanchez-Palencia, 1977).**

- **\mathbf{u}_π^1 vérifie sur Y_s :**

$$\mu_s \nabla_y^2 \mathbf{u}_\pi^1 + (\lambda_s + \mu_s) \nabla_y (\nabla_y \cdot \mathbf{u}_\pi^1) = 0$$

et sur ∂Y_{fs} :

$$-\boldsymbol{\pi}^0 \cdot \mathbf{n} = [\lambda_s \nabla_y \cdot \mathbf{u}_\pi^1 \mathbf{I} + 2 \mu_s \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{u}_\pi^1)] \cdot \mathbf{n}$$

avec des conditions de périodicité sur ∂Y_{se}

• Equations de Biot modifiées

* Tenseur des contraintes totales

$$\sigma_T^0 = \phi \langle \sigma_f^0 \rangle^f + (1 - \phi) \langle \sigma_s^0 \rangle^s$$

$$\nabla_x \cdot \sigma_T^0 = 0$$

* Principe de Terzaghi modifié

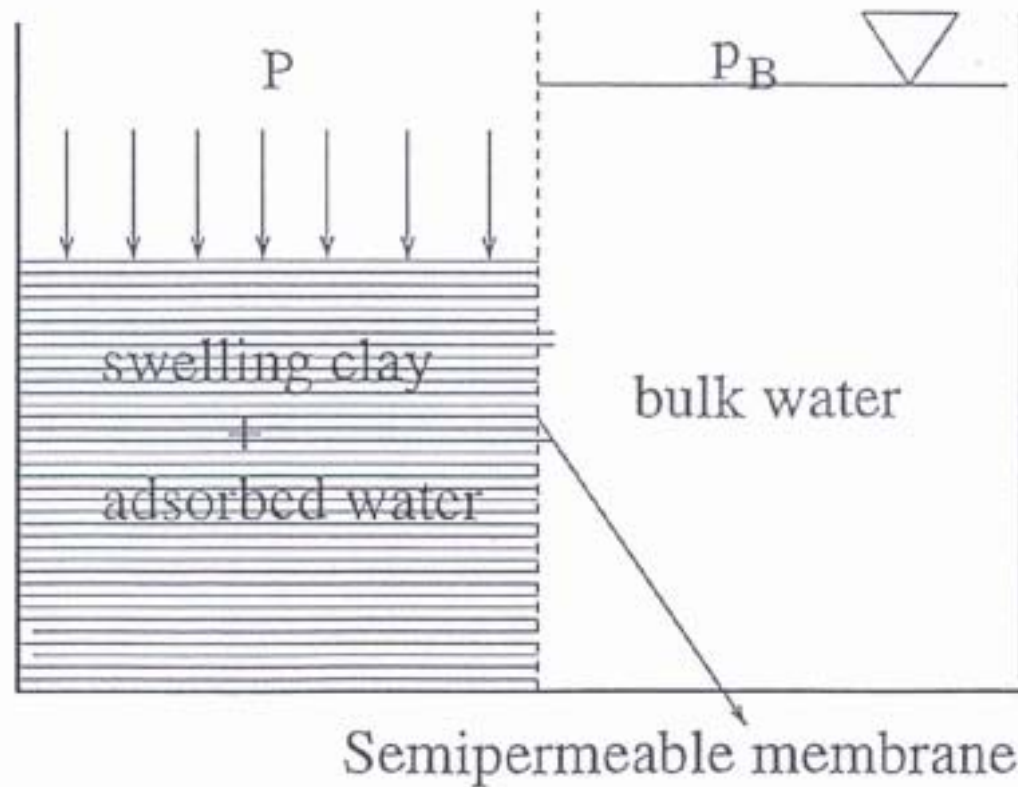
$$\sigma_T^0 = \underbrace{-p_b^0 (\phi \mathbf{I} - \langle \mathbf{c}_s \cdot \mathcal{E}_y(\zeta) \rangle)}_{\text{pression du pore}} + \underbrace{\langle \mathbf{c}_s \cdot (\mathbf{I} + \mathcal{E}_y(\xi)) \rangle \cdot \mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)}_{\text{contraintes de contact}} - \underbrace{\Pi^0}_{\text{tenseur de gonflement}}$$

* Tenseur de gonflement

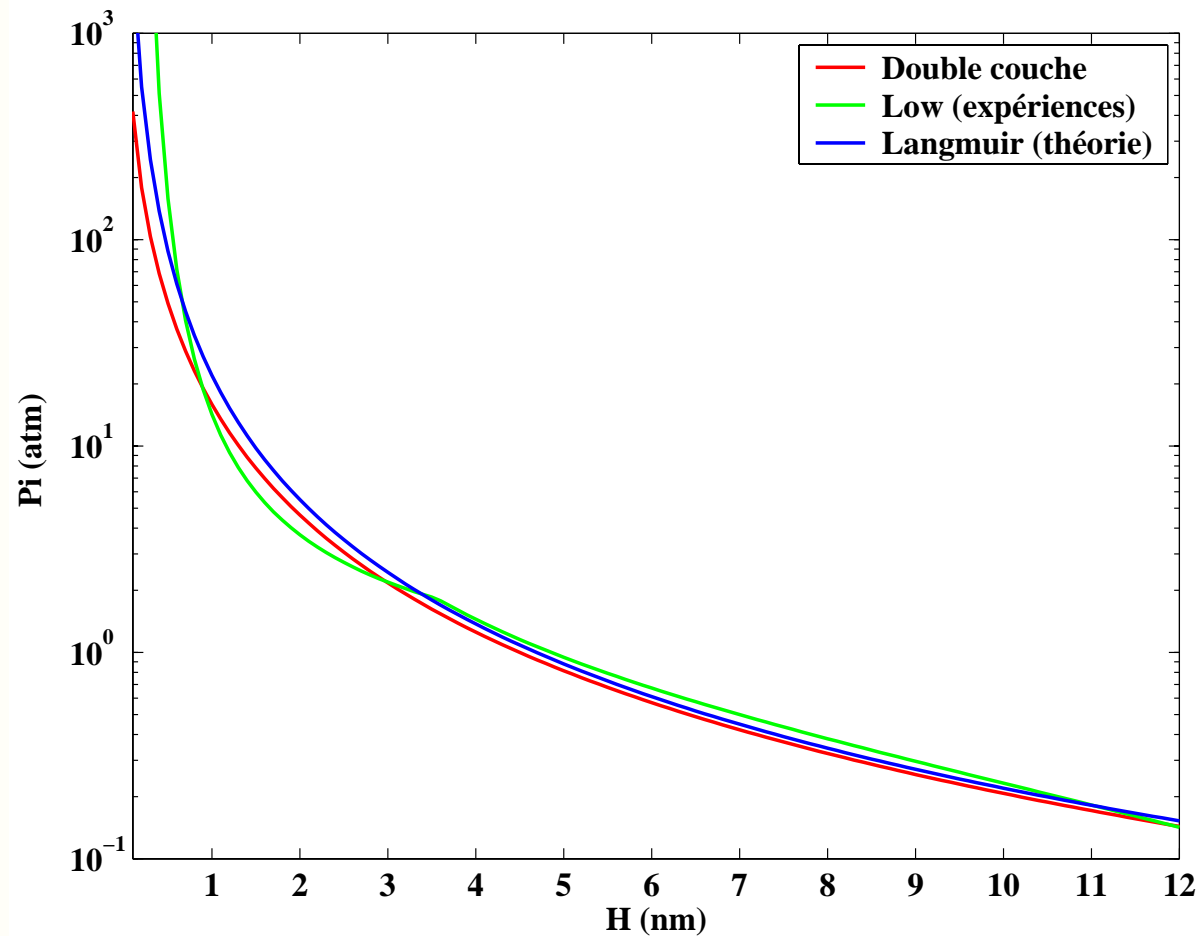
$$\Pi^0 = \underbrace{-(1 - \phi) \langle \mathbf{c}_s \cdot \mathcal{E}_y(\mathbf{u}_\pi^1) \rangle^s}_{\text{solide}} + \underbrace{\phi \langle \pi^0 \rangle^f}_{\text{fluide}}$$

- **Expérience de Philip Low**

- * **Particules d'argile alignées sans contact**
- * **Pas de contrainte de contact dans la loi macroscopique**



$$\Pi = (P - p_b) I$$



$$C = 10^{-4} \text{ mole/l}$$

Formule de Langmuir

$$\Pi \simeq \frac{\pi^2}{2} \epsilon \epsilon_0 \left(\frac{RT}{FH} \right)^2$$

2.3. Equations à la mésoéchelle

• Inconnues

$$\sigma_T^0, p_b^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{v}_D^0, c_b^0, \psi_b^0, \phi$$

• Modèle à deux échelles

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_x \cdot \sigma_T^0 = 0 \\ \sigma_T^0 = -\alpha p_b^0 + \mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) - \Pi^0 \\ \mathbf{v}_D^0 = -\mathbf{K}_P \nabla_x p_b^0 - \mathbf{K}_C \nabla_x c_b^0 - \mathbf{K}_E \nabla_x \psi_b^0 \\ \nabla_x \cdot \mathbf{v}_D^0 + \alpha : \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) = \beta \frac{\partial p_b^0}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_\pi}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi G_\pm^* c_b^0) + \nabla_x \cdot \left[G_\pm^* c_b^0 \mathbf{v}_*^{\pm 0} - \phi \left(\mathbf{D}_\pm^c \nabla_x c_b^0 \pm \mathbf{D}_\pm^e c_b^0 \nabla_x \bar{\psi}_b^0 + \mathbf{D}_\pm^p \nabla_x p_b^0 \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla_x \cdot \mathbf{v}_D^0 + \phi \nabla_x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

Equilibre mécanique

Principe de Terzaghi

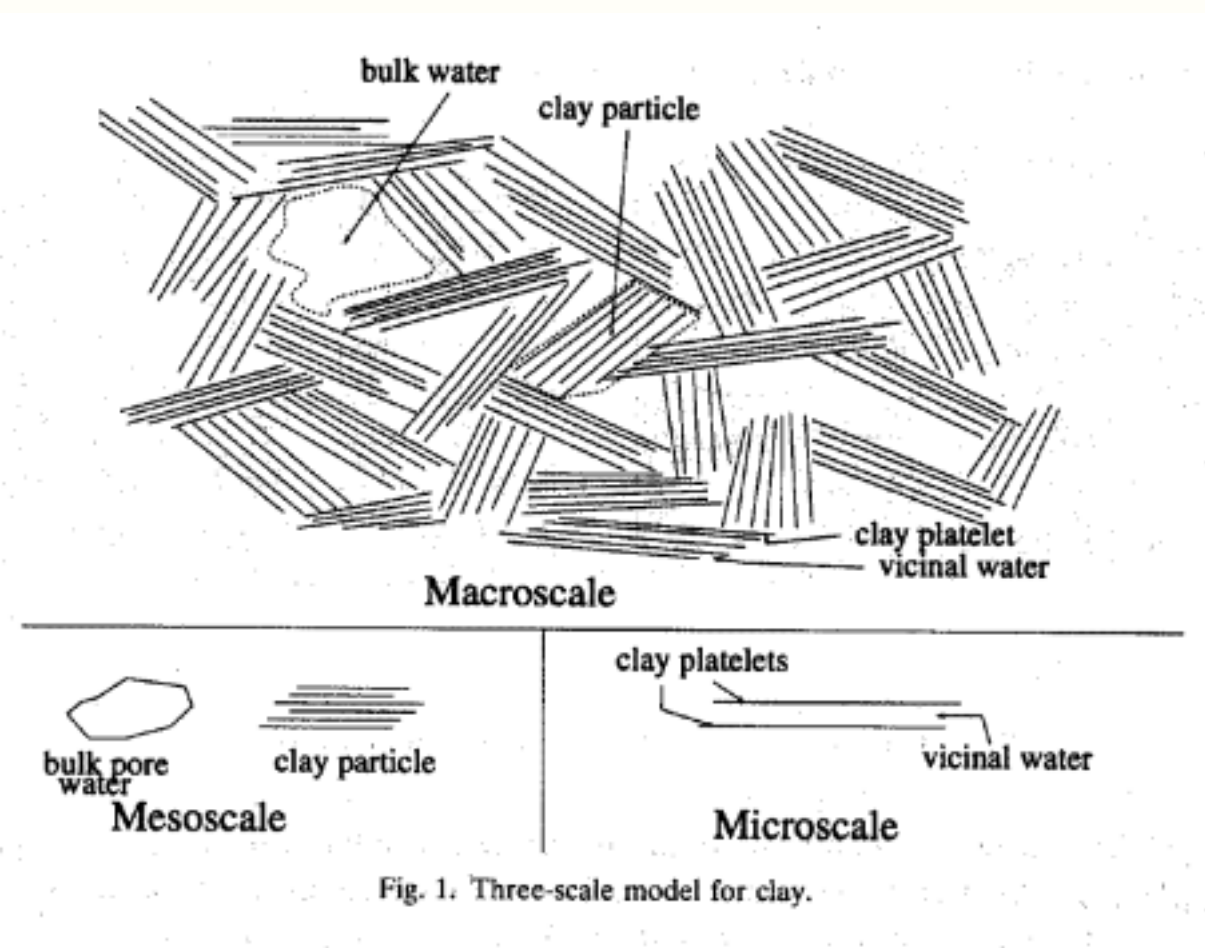
Loi de Darcy

Conserv. masse totale

Transport des ions

Conserv. masse fluide

3. De la mésoéchelle à la macroéchelle



“Mésoméchelle” → “Macroéchelle”

3.1. Equations pour le bulk (fissure)

• Fluide (Stokes)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f &= 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_f &= -P_f \mathbf{I} + 2\mu_f \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{V}_f) \quad \text{dans } \Omega_f \\ \nabla \cdot \mathbf{V}_f &= 0\end{aligned}$$

• Equations de transport $C_f^+ = C_f^- \equiv C_f$

$$2 \frac{\partial C_f}{\partial t} + \nabla \cdot (2C_f \mathbf{V}_f + \mathbf{J}_f) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{I}_f = 0$$

$$\mathbf{J}_f = -2 (D_f \nabla C_f + \Delta_f C_f \nabla \bar{\Psi}_f)$$

$$\mathbf{I}_f = -2F (\Delta_f \nabla C_f + D_f C_f \nabla \bar{\Psi}_f)$$

$$D_f = \frac{\mathcal{D}_{w+} + \mathcal{D}_{w-}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta_f = \frac{\mathcal{D}_{w+} - \mathcal{D}_{w-}}{2}$$

● **Conditions à l'interface : sur Γ_{fs}**

* **Conditions de continuité à l'interface** $\left(V_{fs} = V_f - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)$

	Particules d'argile	Fissure
pression	p_b	P_f
concentration	c_b	C_f
potentiel électrique	ψ_b	Ψ_f
flux liquide	$\mathbf{v}_D \cdot \mathbf{N}$	$V_{fs} \cdot \mathbf{N}$
flux diffusif sel	$\mathbf{J}_d \cdot \mathbf{N}$	$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{N}$
charge	$\mathbf{I}_e \cdot \mathbf{N}$	$\mathbf{I}_f \cdot \mathbf{N}$
contrainte	$\boldsymbol{\sigma}_T \mathbf{N}$	$\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{N}$

* Glissement à l'interface

Double couche très fine à l'interface \longrightarrow Glissement de la vitesse tangentielle

Particules d'argile

Fissure

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}_D - \mathbf{V}_{fs}) \cdot \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{V}_{match} \cdot \boldsymbol{\tau} \\
 \mathbf{V}_{match} &= -K_E^{f\infty} \nabla \Psi_f - K_C^{f\infty} \nabla C_f \\
 K_E^{f\infty} &= \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}_0 \zeta}{\mu_f} \quad (\text{Smoluchovski}) \\
 K_C^{f\infty} &= \frac{8RTL_D^2}{\mu_f} \ln \cosh\left(\frac{\zeta}{4}\right)
 \end{aligned}$$

3.2. Modèle à double porosité

Dans les particules d'argile :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_D^1 \\ \mathbf{J}_c^1 \\ \mathbf{I}_e^1 \end{pmatrix} = -\epsilon^2 \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{PP} & \mathbf{L}_{PC} & \mathbf{L}_{PE} \\ \mathbf{L}_{CP} & \mathbf{L}_{CC} & \mathbf{L}_{CE} \\ \mathbf{L}_{EP} & \mathbf{L}_{EC} & \mathbf{L}_{EE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y p_b^0 \\ RT \nabla_y \ln c_b^0 \\ \nabla_y \psi_b^0 \end{pmatrix}$$

Modèle à double porosité

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}_L^0 - \nabla_x P_f^0 = 0$$

Equation du mouvement totale

$$\boldsymbol{\sigma}_L^0 = - \langle p_b^0 \rangle_y \mathbf{I} + (1 - \phi) \mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) + \mathbf{C}_s \langle \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^1) \rangle_y - \langle \boldsymbol{\Pi}^0 \rangle_y$$

$$\nabla_x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} + \nabla_x \cdot \mathbf{V}_{Df}^0 = 0$$

Conserv. masse totale

$$\mathbf{V}_{Df}^0 = -\mathbf{K}_P^f \nabla_x P_f^0 - \mathbf{K}_C^f \nabla_x C_f^0 - \mathbf{K}_E^f \nabla_x \Psi_f^0$$

Loi de Darcy macroscopique

$$\frac{\partial n_f}{\partial t} + (1 - n_f) \nabla_x \cdot \mathbf{V}_{Df}^0 = - \left\langle \frac{1}{1 - \phi^0} \frac{\partial \phi^0}{\partial t} \right\rangle_y$$

Conserv. masse fluide

$$2 \frac{\partial}{\partial t} (n_f C_f^0) + \nabla_x \cdot \mathbf{J}_F^0 = - \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi^0 G_c c_b^0 \rangle_y$$

Conserv. masse espèces

$$\mathbf{J}_F^0 = 2 C_f^0 \mathbf{V}_{Df}^0 - 2 \left(\mathbf{D}_f^{eff} \nabla_x C_f^0 + \Delta_f^{eff} C_f^0 \nabla_x \bar{\Psi}_f^0 \right)$$

$$\nabla_x \cdot \mathbf{I}_F^0 = 0$$

Conserv. macroscopique charge

$$\mathbf{I}_F^0 = -2 F \left(\Delta_f^{eff} \nabla_x C_f^0 + \mathbf{D}_f^{eff} C_f^0 \nabla_x \bar{\Psi}_f^0 \right)$$

et dans les particules d'argile

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y \cdot (\mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^1)) - \nabla_y p_b^0 - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\Pi}^0 = 0 \\ \nabla_y \cdot \mathbf{v}_D^1 + \nabla_y \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial t} = -\nabla_x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi^0}{\partial t} - (1 - \phi^0) \nabla_y \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial t} = (1 - \phi^0) \nabla_x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi^0 G_c c_b^0) + \nabla_y \cdot \mathbf{J}_d^1 + 2 \nabla_y \cdot (c_b^1 \mathbf{v}_D^1) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi^0 G_s c_b^0) + \nabla_y \cdot \mathbf{I}_e^1 = 0 \\ \mathbf{v}_D^1 = -L_{PP} \nabla_y p_b^0 - L_{PC} \nabla_y c_b^0 - L_{PE} \nabla_y \psi_b^0 \\ \mathbf{J}_d^1 = -L_{CP} \nabla_y p_b^0 - L_{CC} \nabla_y c_b^0 - L_{CE} \nabla_y \psi_b^0 \\ \mathbf{I}_e^1 = -L_{EP} \nabla_y p_b^0 - L_{EC} \nabla_y c_b^0 - L_{EE} \nabla_y \psi_b^0 \end{array} \right.$$

avec les conditions limites suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^1) + \boldsymbol{\Pi}^0) \mathbf{N} = \mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) \mathbf{N} \\ p_b^0 = P_f^0 \quad c_b^0 = C_f^0 \quad \psi_b^0 = \Psi_f^0 \end{array} \right.$$

3.3. Modèle à trois échelles quasi permanent

“valeurs supposées uniformes dans les particules d’argile”

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}_T^0 = 0 \\
 \boldsymbol{\sigma}_T^0 = -P_f^0 \mathbf{I} + \mathbf{C}^{eff} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) - \boldsymbol{\Pi}^{eff} \\
 \nabla_x \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} + \nabla_x \cdot \mathbf{V}_{Df}^0 = 0 \\
 \mathbf{V}_{Df}^0 = -\mathbf{K}_P^f \nabla_x P_f^0 - \mathbf{K}_C^f \nabla_x C_f^0 - \mathbf{K}_E^f \nabla_x \Psi_f^0 \\
 \frac{\partial n_f}{\partial t} + (1 - n_f) \nabla_x \cdot \mathbf{V}_{Df}^0 + \boldsymbol{\alpha} : \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) = - \left\langle \nabla_y \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_\pi^1}{\partial t} \right\rangle_y \\
 \frac{\partial}{\partial t} (n_f C_f^0) + \frac{\partial}{\partial t} (K_* C_f^0) + \nabla_x \cdot (C_f^0 \mathbf{V}_{Df}^0 + \mathbf{J}_F^0) = 0 \\
 \mathbf{J}_F^0 = - \left(\mathbf{D}_f^{eff} \nabla_x C_f^0 + \Delta_f^{eff} C_f^0 \nabla_x \bar{\Psi}_f^0 \right) \\
 \nabla_x \cdot \mathbf{I}_F^0 = 0 \\
 \mathbf{I}_F^0 = -2F \left(\Delta_f^{eff} \nabla_x C_f^0 + \mathbf{D}_f^{eff} C_f^0 \nabla_x \bar{\Psi}_f^0 \right)
 \end{array} \right.$$

- **Décomposition de Terzaghi dans l'approximation quasi permanente**

$$\sigma_T^0 = -P_f^0 \mathbf{I} + \mathbf{C}^{eff} \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) - \boldsymbol{\Pi}^{eff}$$

- **Fermeture**

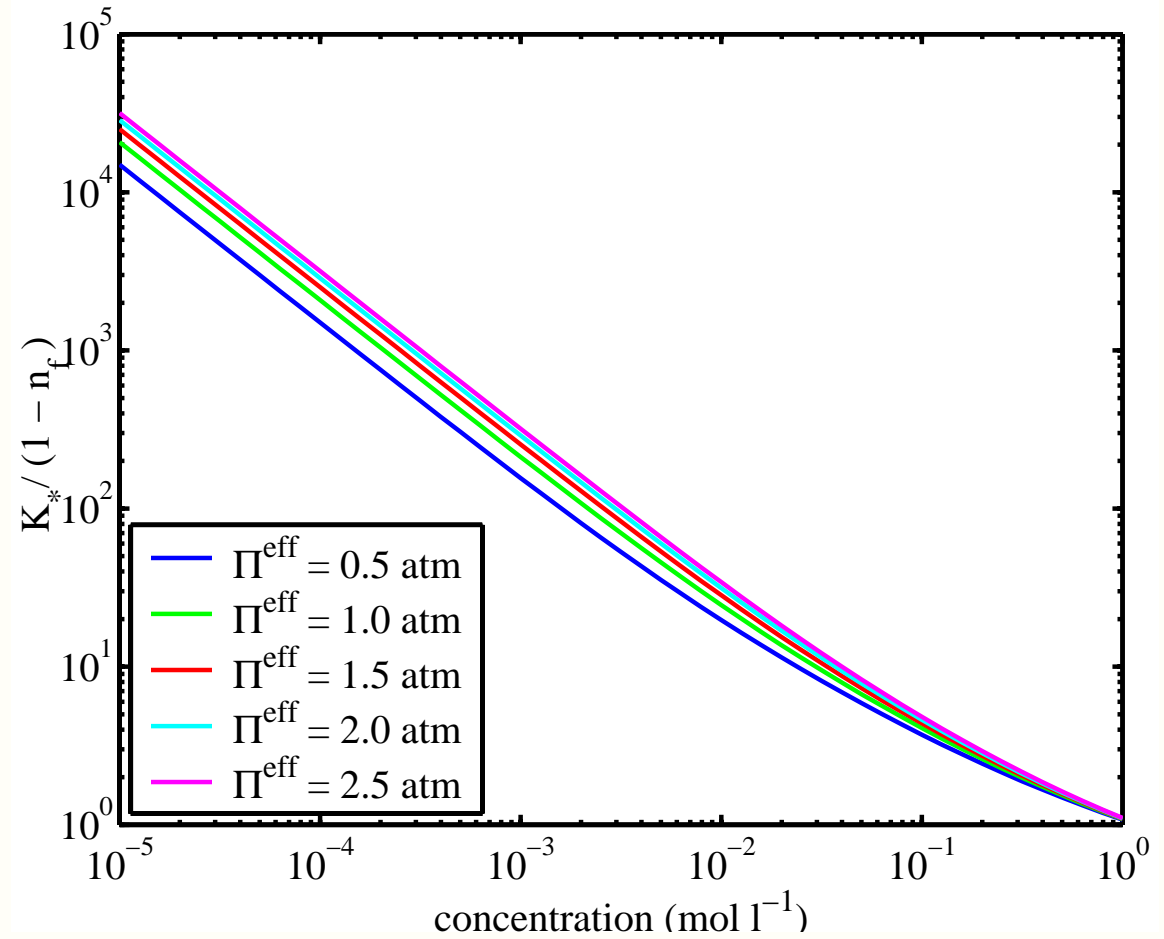
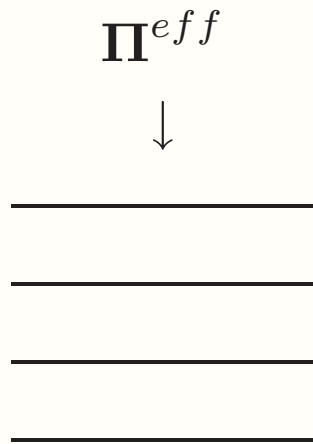
$$\begin{cases} \nabla_y \cdot (\mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^1)) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\Pi}^0 = 0 & \text{dans } Y_s \\ \mathbf{C}_s [\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^1)] \mathbf{N} = \boldsymbol{\Pi}^0 \mathbf{N} & \text{sur } \partial Y_{fs} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{u}_\pi^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$$

$$\begin{array}{l|l} \nabla_y \cdot (\mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{\xi})) = 0 & \nabla_y \cdot (\mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}_\pi^1)) = \nabla_y \cdot \boldsymbol{\Pi}^0 \\ (\mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{\xi})) \mathbf{N} = -\mathbf{C}_s (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{N} & \mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}_\pi^1) \mathbf{N} = \boldsymbol{\Pi}^0 \mathbf{N} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{dans } Y_s \\ \text{sur } \partial Y_{fs} \end{array} \right.$$

- **Propriétés homogénéisées**

$$\mathbf{C}^{eff} \equiv \langle \mathbf{C}_s [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{\xi})] \rangle_y \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Pi}^{eff} \equiv \langle \boldsymbol{\Pi}^0 - \mathbf{C}_s \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}_\pi^1) \rangle_y$$



Blocs composés d'un arrangement de particules d'argile parallèles

4. Conclusions

- * **Théorie complète pour le problème à deux échelles.**
- * **La physique du modèle** peut être étendue à la microéchelle : forces d'hydratation, forces de Van der Waals, couplage avec la dynamique moléculaire...
- * **Solution pour le modèle à trois échelles dans le cas saturé.**
- * **Extension pour le cas non-saturé en cours** : couplage entre pression de disjonction et pression capillaire.
- * **Cas de l'électro-osmose** : prise en compte du pH.
- * **Applications** : barrières ouvragées (déchets nucléaires); clay liner (déchets); stabilité des puits ; electro-osmose ; biomécanique...