

Homogénéisation d'une équation de diffusion avec dérive et amortissement

Yves Capdeboscq

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

GDR MOMAS

8 octobre 2004

Modèle de diffusion avec dérive

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left(d \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \phi^\epsilon \right) + \frac{1}{\epsilon} j \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \phi^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} s \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \phi^\epsilon = 0 \text{ sur } \Omega \\ \phi^\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \phi^\epsilon (t = 0, x) = \phi_0(x) \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

On suppose

$$c |\xi|^2 \leq d \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \xi \cdot \xi \leq C |\xi|^2 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n$$

d, ω, j et s périodiques, $-\infty < c < \omega, j, s < C < +\infty$.

Interprétation du problème en neutronique

$$\omega \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left(d \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \phi^\epsilon \right) + \frac{1}{\epsilon} j \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \phi^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} s^+ \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \phi^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} s^- \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \phi^\epsilon$$

ϕ^ϵ : densité de neutrons à une vitesse donnée.

s^+ : absorption

s^- : fission

j : facteur de dérive (absence de symétrie microscopique)

Interprétation du problème en neutronique

$$\omega \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left(d \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \phi^\epsilon \right) + \frac{1}{\epsilon} j \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \phi^\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} s^+ \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \phi^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} s^- \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \phi^\epsilon$$

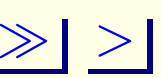
ϕ^ϵ : densité de neutrons à une vitesse donnée.

s^+ : absorption

s^- : fission

j : facteur de dérive (absence de symétrie microscopique)

On peut supposer que $s^+, s^- > 1$.



Références

Larsen-Keller,

Sentis,

Bensoussan-Lions-Papanicolaou,

Dumas-Golse,

Allaire-Bal,

Allaire-C.,

Références

Larsen-Keller,

Sentis,

Bensoussan-Lions-Papanicolaou,

Dumas-Golse,

Allaire-Bal,

Allaire-C.,

Babovsky-Bardos-Platkowski

Goudon-Poupaud,

Kozlov-Pyatniskii.

C.,

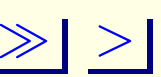
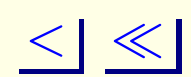
Simplification du problème

Ce problème est, à un changement d'inconnue près,

$$\frac{1}{v\left(\frac{x}{\epsilon}\right)} \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \varphi^\epsilon \right) + \frac{1}{\epsilon} b \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \varphi^\epsilon = 0$$

avec

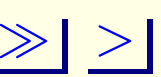
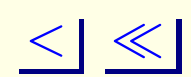
$$\operatorname{div}(b) = 0.$$



Simplification du problème

A priori, le comportement asymptotique est donné par le problème périodique (dev. asymp.): solution asymptotique (non triviale) de

$$-\operatorname{div}_y (d(y) \nabla_y \phi) + j(y) \cdot \nabla_y \phi + s^+(y) \phi = s^-(y) \phi$$



Simplification du problème

A priori, le comportement asymptotique est donné par le problème périodique (dev. asymp.): solution asymptotique (non triviale) de

$$-\operatorname{div}_y (d(y) \nabla_y \phi) + j(y) \cdot \nabla_y \phi + s^+(y) \phi = s^-(y) \phi$$

En général, pas de solution.

Simplification du problème

A priori, le comportement asymptotique est donné par le problème périodique (dev. asymp.): solution asymptotique (non triviale) de

$$-\operatorname{div}_y (d(y) \nabla_y \psi) + j(y) \cdot \nabla_y \psi + s^+(y) \psi = \lambda s^-(y) \psi$$

En général, pas de solution. On étudie alors le problème aux valeurs propres: il existe alors toujours une solution $\psi > 0$ (densité)

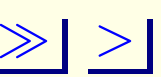
Simplification du problème

A priori, le comportement asymptotique est donné par le problème périodique (dev. asymp.): solution asymptotique (non triviale) de

$$-\operatorname{div}_y (d(y) \nabla_y \psi) + j(y) \cdot \nabla_y \psi + s^+(y) \psi = \lambda s^-(y) \psi$$

En général, pas de solution. On étudie alors le problème aux valeurs propres: il existe alors toujours une solution $\psi > 0$ (densité)

Il s'agit du même problème si $\lambda = 1$.



Simplification du problème

Introduction d'un facteur temps

$$\phi^\epsilon(t, x) = \tilde{\phi}^\epsilon(t, x) \exp\left(\tau_0 t / \epsilon^2\right)$$

Simplification du problème

Introduction d'un facteur temps

$$\phi^\epsilon(t, x) = \tilde{\phi}^\epsilon(t, x) \exp\left(\tau_0 t / \epsilon^2\right)$$

$$\rightsquigarrow -\operatorname{div}_y (d(y) \nabla_y \psi_0) + j(y) \cdot \nabla_y \psi_0 + \left(\tau_0 \omega(y) + s^+(y)\right) \psi_0 = 1 \times s^-(y) \psi_0$$

On choisit

$$C > \psi_0 > c > 0$$

Simplification du problème

Introduction d'un facteur temps

$$\phi^\epsilon(t, x) = \tilde{\phi}^\epsilon(t, x) \exp\left(\tau_0 t / \epsilon^2\right)$$

$$\rightsquigarrow -\operatorname{div}_y (d(y) \nabla_y \psi_0) + j(y) \cdot \nabla_y \psi_0 + \left(\tau_0 \omega(y) + s^+(y)\right) \psi_0 = 1 \times s^-(y) \psi_0$$

On choisit

$$C > \psi_0 > c > 0$$

$\lambda(=1)$ est la première valeur propre, donc elle est commune aux problèmes directs et adjoints

$$-\operatorname{div}_y (d(y) \nabla_y \psi_0^*) - j(y) \cdot \nabla_y \psi_0^* + \left(\tau_0 \omega(y) + s^+(y)\right) \psi_0^* = s^-(y) \psi_0^*$$

Méthode de factorisation

$$\left(-\operatorname{div} \left(d \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \left(\varphi^\epsilon(x) \psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} j \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \left(\varphi^\epsilon(x) \psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) \psi_0^* \left(\frac{x}{\epsilon} \right)$$

Méthode de factorisation

$$\begin{aligned} & \left(-\operatorname{div} \left(d \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \left(\varphi^\epsilon(x) \psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} j \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \left(\varphi^\epsilon(x) \psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) \psi_0^* \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \\ = & \left(-\operatorname{div} \left(d \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \left(\psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} j \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \left(\psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) \varphi^\epsilon(x) \psi_0^* \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \end{aligned}$$

Méthode de factorisation

$$\begin{aligned} & \left(-\operatorname{div} \left(d \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \left(\varphi^\epsilon(x) \psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} j \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \left(\varphi^\epsilon(x) \psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) \psi_0^* \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \\ = & \left(-\operatorname{div} \left(d \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \left(\psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) + \frac{1}{\epsilon} j \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \left(\psi_0 \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right) \right) \varphi^\epsilon(x) \psi_0^* \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \\ - & \operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \varphi^\epsilon(x) \right) + \frac{1}{\epsilon} b \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \varphi^\epsilon(x) \end{aligned}$$

avec

$$a = d\psi_0\psi_0^*$$

$$b = j\psi_0\psi_0^* + \psi_0 d\nabla\psi_0^* - \psi_0^* d\nabla\psi_0$$

Méthode de factorisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v\left(\frac{x}{\epsilon}\right)} \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \varphi^\epsilon \right) + \frac{1}{\epsilon} b \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla \varphi^\epsilon = 0 \text{ sur } \Omega \\ \varphi^\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \varphi^\epsilon(t=0, x) = \phi_0(x) \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Après le changement d'inconnue

$$\varphi^\epsilon(x) = \phi^\epsilon(x) e^{-\frac{\tau_0}{\epsilon^2} t} \frac{1}{\psi_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}.$$

Lec coefficients a, b, v sont périodiques et $\operatorname{div}(b) = 0$.

Homogénéisation

Double échelle, ou développements asymptotiques: équations des correcteurs (ϵ^{-1})

$$-\operatorname{div}_y (a(y) \nabla \varphi_1) + b(y) \nabla \varphi_1 = \operatorname{div}_y (a(y) \nabla_x \varphi_0) + b(y) \cdot \nabla_x \varphi_0 \text{ sur } Y$$

Correcteurs

$$-\operatorname{div}_y (a(y) \nabla \xi_1^i) + b(y) \nabla \xi_1^i = \operatorname{div}_y (a(y) e^i) + b(y) \cdot e^i$$

Homogénéisation

Double échelle, ou développements asymptotiques: équations des correcteurs (ϵ^{-1})

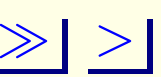
$$-\operatorname{div}_y (a(y) \nabla \varphi_1) + b(y) \nabla \varphi_1 = \operatorname{div}_y (a(y) \nabla_x \varphi_0) + b(y) \cdot \nabla_x \varphi_0 \text{ sur } Y$$

Correcteurs

$$-\operatorname{div}_y (a(y) \nabla \xi_1^i) + b(y) \nabla \xi_1^i = \operatorname{div}_y (a(y) e^i) + b(y) \cdot e^i$$

Compatibilité

$$\int_Y b(y) dy = 0.$$



Homogénéisation

Si l'équation de compatibilité est vérifiée

$$\phi^\epsilon(x) = \exp\left(\frac{\tau_0}{\epsilon^2}t\right) \psi_0(x/\epsilon) \left(\varphi^0(x) + o(1)\right)$$

Homogénéisation

Si l'équation de compatibilité est vérifiée

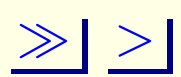
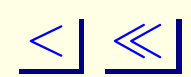
$$\phi^\epsilon(x) = \exp\left(\frac{\tau_0}{\epsilon^2}t\right) \psi_0(x/\epsilon) \left(\varphi^0(x) + o(1)\right)$$

Et φ^0 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v^*} \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} - \operatorname{div} \left(a^* \nabla \varphi^0 \right) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \varphi^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \varphi^0(t=0, x) = \frac{1}{\int_Y \psi_0(y) dy} \phi_0(x) \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

avec

$$a_{ij}^* = \int_Y a(y) \nabla(y_i + \xi_i) \cdot \nabla(y_j + \xi_j) dy$$



Phénomène de dérivation en 1D

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{\epsilon} b \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Phénomène de dérive en 1D

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{\epsilon} b \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Changement d'inconnue. On introduit $u_\epsilon = e^{h(\frac{x}{\epsilon})} v_\epsilon$. Après développement on élimine le premier ordre avec

$$h'(x) = \frac{b}{2a(x)}$$

Phénomène de dérive en 1D

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{\epsilon} b \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Changement d'inconnue. On introduit $u_\epsilon = e^{h(\frac{x}{\epsilon})} v_\epsilon$. Après développement on élimine le premier ordre avec

$$h'(x) = \frac{b}{2a(x)}$$

$$u_\epsilon(x) = v_\epsilon(x) \underbrace{e^{\frac{x}{\epsilon} \int_0^1 \frac{b}{2a(t)} dt}}_{\text{exponentiel}} \underbrace{e^{\int_0^{x/\epsilon} \left(\frac{b}{2a(t)} - \int_0^{x/\epsilon} \frac{b}{2a(u)} du \right) dt}}_{\text{périodique}} .$$

Phénomène de dérive en 1D

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{\epsilon} b \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

L'équation (1) devient

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{b^2}{4a} v_\epsilon = 0 \tag{2}$$

Problème auto-adjoint. La solution est donc de la forme

$$u_\epsilon(x) = e^{\theta \frac{x}{\epsilon}} \underbrace{\psi \left(\frac{x}{\epsilon} \right)}_{\text{périodique}} (v(x) + o(1))$$

Phénomène de dérive en 1D

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{\epsilon} b \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

L'équation (1) devient

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x} \right) + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{b^2}{4a} v_\epsilon = 0 \quad (2)$$

Problème auto-adjoint. La solution est donc de la forme

$$u_\epsilon(x) = e^{\theta \frac{x}{\epsilon}} \underbrace{\psi \left(\frac{x}{\epsilon} \right)}_{\text{périodique}} (v(x) + o(1))$$

“Onde de Bloch réelle”

Ondes de Bloch en homogénéisation

A l'opérateur

$$\mathcal{A} = -\frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{kl}(y) \frac{\partial}{\partial y_l} \right)$$

on associe des ondes planes

$$\phi(y; \eta) = e^{i\eta \cdot y} \varphi(y; \eta)$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\eta)\varphi = \lambda(\eta)\varphi \\ \varphi(\cdot; \eta) \text{ } Y \text{ périodique} \end{cases}$$

Ondes de Bloch en homogénéisation

A l'opérateur

$$\mathcal{A} = -\frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{kl}(y) \frac{\partial}{\partial y_l} \right)$$

on associe des ondes planes

$$\phi(y; \eta) = e^{i\eta \cdot y} \varphi(y; \eta)$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\eta)\varphi = \lambda(\eta)\varphi \\ \varphi(\cdot; \eta) \text{ } Y \text{ périodique} \end{cases}$$

Pour chaque η ,

$$\lambda_1(\eta) \leq \dots \leq \lambda_m(\eta) \leq \dots \rightarrow \infty$$

$(\varphi(\cdot; \eta))_{m=1}^{\infty}$ forment une base orthogonale de $L^2_{\#}(Y)$

Ondes de Bloch en homogénéisation

A l'opérateur

$$\mathcal{A} = -\frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{kl}(y) \frac{\partial}{\partial y_l} \right)$$

on associe des ondes planes

$$\phi(y; \eta) = e^{i\eta \cdot y} \varphi(y; \eta)$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\eta)\varphi = \lambda(\eta)\varphi \\ \varphi(\cdot; \eta) \text{ } Y \text{ périodique} \end{cases}$$

Pour chaque η ,

$$\lambda_1(\eta) \leq \dots \leq \lambda_m(\eta) \leq \dots \rightarrow \infty$$

$(\varphi(\cdot; \eta))_{m=1}^{\infty}$ forment une base orthogonale de $L^2_{\#}(Y)$

On peut introduire une transformée de Bloch

$$\hat{g}_m(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i\eta \cdot y} \varphi_m(y; \eta) dy$$

Qui s'inverse

$$g(y) = \int_{Y'} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{g}_m(\eta) e^{i\eta \cdot y} \varphi_m(y; \eta) d\eta.$$

Ondes de Bloch en homogénéisation

Théorème: La première valeur propre de Bloch $\lambda_1(\eta)$ a un minimum absolu en $\eta = 0$.

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \eta_k}(0) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

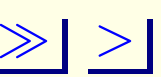
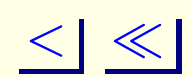
Elle est strictement convexe autour de zéro, et la hessienne en zero est donnée par

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \eta_k \partial \eta_l}(0) = a_{kl}^*.$$

De plus, la dérivée du premier mode de Bloch vérifie

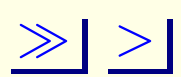
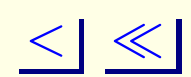
$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta_k}(y; 0) = i \xi_k(y).$$

Bensoussan-Lions-Papanicolaou, Babuska-Morgan, Conca-Vanninathan, Allaire.



Ondes de Bloch réelles

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (a(y) \nabla \psi(y; \theta)) + b(y) \cdot \nabla \psi(y; \theta) &= \lambda_1(\theta) \psi(y; \theta) \\ \psi(\cdot; \theta) e^{-\theta \cdot y} & \text{Y-périodique.} \end{aligned}$$



Ondes de Bloch réelles

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (a(y) \nabla \psi(y; \theta)) + b(y) \cdot \nabla \psi(y; \theta) &= \lambda_1(\theta) \psi(y; \theta) \\ \psi(\cdot; \theta) e^{-\theta \cdot y} & \text{Y-périodique.} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta}(0) = \int_Y b(y) dy.$$

Ondes de Bloch réelles

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (a(y) \nabla \psi(y; \theta)) + b(y) \cdot \nabla \psi(y; \theta) &= \lambda_1(\theta) \psi(y; \theta) \\ \psi(\cdot; \theta) e^{-\theta \cdot y} & \quad Y\text{-périodique.} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta}(0) = \int_Y b(y) dy.$$

Théorème: la première valeur propre $\lambda_1(\theta)$ admet un unique maximum. En ce point, les vecteurs propres directs et adjoints correspondant vérifient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta_k}(\theta^*) &= \int_Y b(y) \psi(y; \theta) \psi^*(y; \theta) + a(y) \left(\psi^*(y; \theta) \frac{\partial \psi}{\partial y_k}(y; \theta) - \psi(y; \theta) \frac{\partial \psi^*}{\partial y_k}(y; \theta) \right) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

(C, Asympt. Anal, 00)

Ondes de Bloch réelles

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (a(y) \nabla \psi(y; \theta)) + b(y) \cdot \nabla \psi(y; \theta) &= \lambda_1(\theta) \psi(y; \theta) \\ \psi(\cdot; \theta) e^{-\theta \cdot y} & \text{Y-périodique.} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta}(0) = \int_Y b(y) dy.$$

Théorème: la première valeur propre $\lambda_1(\theta)$ admet un unique maximum. En ce point, les vecteurs propres directs et adjoints correspondant vérifient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta_k}(\theta^*) &= \int_Y b(y) \psi(y; \theta) \psi^*(y; \theta) + a(y) \left(\psi^*(y; \theta) \frac{\partial \psi}{\partial y_k}(y; \theta) - \psi(y; \theta) \frac{\partial \psi^*}{\partial y_k}(y; \theta) \right) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

(C, Asympt. Anal, 00)

“Bon” problème de cellule si

$$\lambda_1(\theta^*) = 0 \Leftrightarrow \theta^* = 0.$$

Ondes de Bloch réelles

Sinon, remise à l'échelle en temps (τ/ϵ^2)

$$-\operatorname{div} (a(y) \nabla \psi(y; \theta, \tau)) + b(y) \cdot \nabla \psi(y; \theta, \tau) + \tau \frac{1}{v(y)} = \lambda_1(\theta, \tau) \psi(y, \theta, \tau)$$

$\psi(\cdot; \theta, \tau) e^{-\theta \cdot y}$ Y -périodique.

Il existe un unique couple $(\tau_\infty, \theta_\infty)$ tels que

$$\lambda_1(\theta_\infty, \tau_\infty) = 0 \text{ et } \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta_k}(\theta_\infty, \tau_\infty) = 0.$$

Homogénéisation

On a alors

$$\phi^\epsilon(x) = \exp\left(\frac{\tau_*}{\epsilon^2}t\right) \exp\left(\theta_\infty \cdot \frac{x}{\epsilon}\right) \psi_*(x/\epsilon) \left(\varphi^0(x) + o(1)\right)$$

Homogénéisation

On a alors

$$\phi^\epsilon(x) = \exp\left(\frac{\tau_*}{\epsilon^2}t\right) \exp\left(\theta_\infty \cdot \frac{x}{\epsilon}\right) \psi_*(x/\epsilon) \left(\varphi^0(x) + o(1)\right)$$

avec $\tau_* = \tau_0 + \tau_\infty$, $\psi_*(\cdot) = \psi_0(\cdot)\psi(\cdot; \theta_\infty, \tau_\infty)$ et où φ^0 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v^*} \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} - \operatorname{div} \left(a^* \nabla \varphi^0 \right) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \varphi^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \varphi^0(t=0, x) = \frac{1}{\int_Y \psi(y, \theta_\infty, \tau_\infty) dy} f_0(x) \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Homogénéisation

On a alors

$$\phi^\epsilon(x) = \exp\left(\frac{\tau_*}{\epsilon^2}t\right) \exp\left(\theta_\infty \cdot \frac{x}{\epsilon}\right) \psi_*(x/\epsilon) \left(\varphi^0(x) + o(1)\right)$$

avec $\tau_* = \tau_0 + \tau_\infty$, $\psi_*(\cdot) = \psi_0(\cdot)\psi(\cdot; \theta_\infty, \tau_\infty)$ et où φ^0 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v^*} \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} - \operatorname{div} \left(a^* \nabla \varphi^0 \right) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \varphi^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \varphi^0(t=0, x) = \frac{1}{\int_Y \psi(y, \theta_\infty, \tau_\infty) dy} f_0(x) \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Avec

$$a_{kl}^* = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta_k \partial \theta_l}(\theta_\infty, \tau_\infty).$$

$$\text{et } v^* = \int_Y \frac{\psi^*(y, \theta_\infty, \tau_\infty) \psi(y, \theta_\infty, \tau_\infty)}{v(y)} dy.$$

Homogénéisation

On a alors

$$\phi^\epsilon(x) = \exp\left(\frac{\tau_*}{\epsilon^2}t\right) \exp\left(\theta_\infty \cdot \frac{x}{\epsilon}\right) \psi_*(x/\epsilon) \left(\varphi^0(x) + o(1)\right)$$

avec $\tau_* = \tau_0 + \tau_\infty$, $\psi_*(\cdot) = \psi_0(\cdot)\psi(\cdot; \theta_\infty, \tau_\infty)$ et où φ^0 vérifie

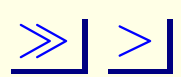
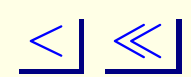
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v^*} \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} - \operatorname{div} \left(a^* \nabla \varphi^0 \right) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \varphi^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \varphi^0(t=0, x) = \frac{1}{\int_Y \psi(y, \theta_\infty, \tau_\infty) dy} f_0(x) \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Avec

$$a_{kl}^* = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta_k \partial \theta_l}(\theta_\infty, \tau_\infty).$$

$$\text{et } v^* = \int_Y \frac{\psi^*(y, \theta_\infty, \tau_\infty) \psi(y, \theta_\infty, \tau_\infty)}{v(y)} dy.$$

Pour des données initiales bien préparées i.e. $\phi_0(x) = \exp\left(\theta_\infty \cdot \frac{x}{\epsilon}\right) f_0(x)$.



Merci