



## **Modèles Asymptotiques pour un réseau de conteneurs.**

Yves Capdeboscq,  
INSA de Rennes & IRMAR

en collaboration avec

Grégoire Allaire,  
CMAP Ecole Polytechnique.

**Journée Homogénéisation Numérique en Milieux Poreux**



## Modèle Couplex

On considère le modèle introduit pour l'exercice COUPLEX

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_\epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (A_\epsilon \nabla \phi_\epsilon) + \lambda \omega_\epsilon \phi_\epsilon = f_\epsilon(t, x) \text{ dans } \Omega, \\ \\ \phi_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \\ \phi_\epsilon(t = 0) = \phi_0^\epsilon(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

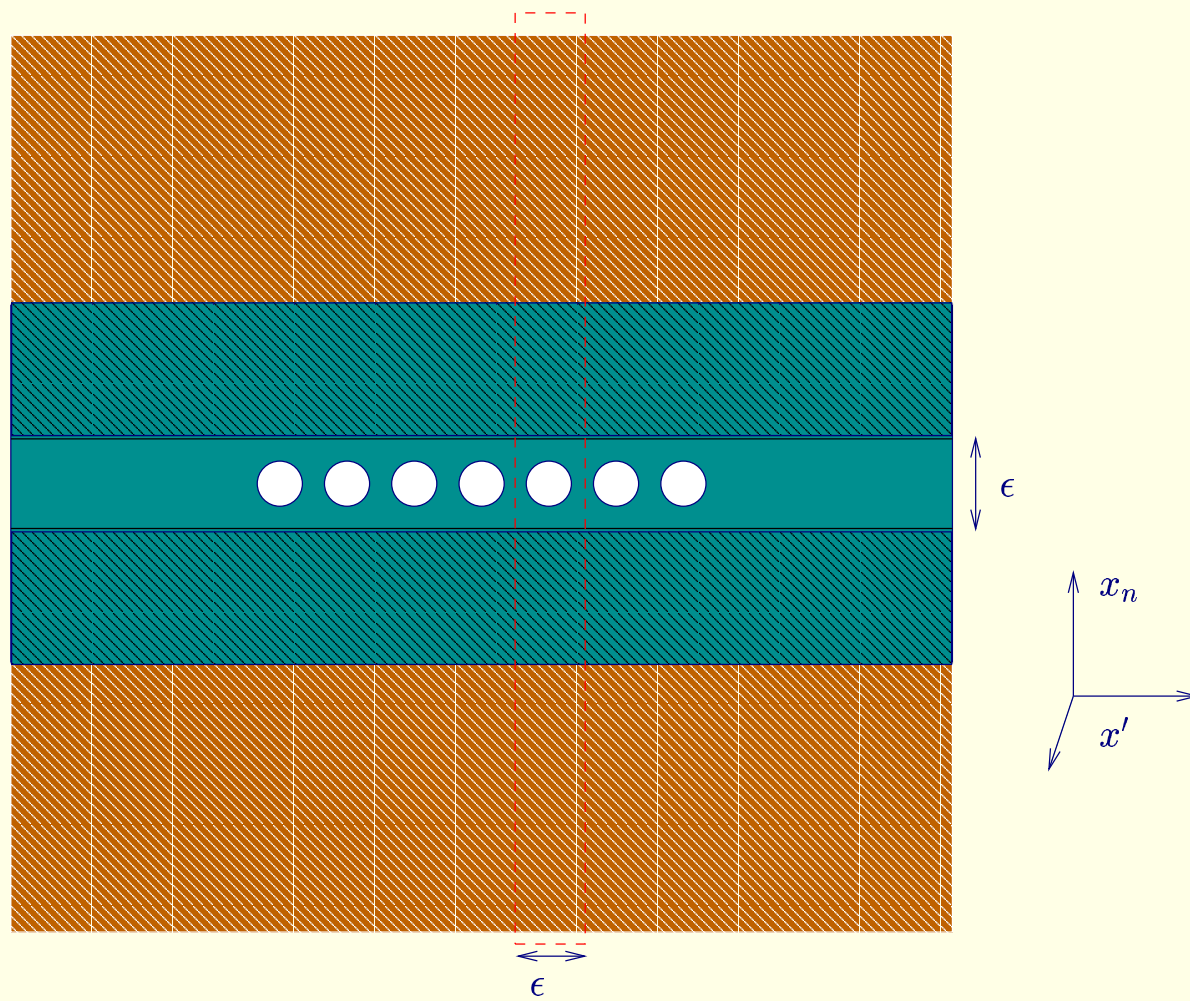
où  $\phi_\epsilon$  représente une densité de polluant.

Quelles échelles choisir pour obtenir un bon modèle homogénéisé:

- qui présente des comportements temps courts/temps longs.
- qui prenne en compte des sources concentrées sur une petite zone.



# Géométrie



## Première approche: méthode de factorisation

Terme source de la forme  $f_\epsilon(t, x) = g\left(\epsilon^2 t, \frac{x}{\epsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\epsilon}\right)$

$$A_\epsilon = \epsilon^2 \left( a\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\epsilon}\right) + B(x) \right)$$

où  $\chi(y) = 1 \Leftrightarrow |y| < 1$ .

On introduit la famille de problèmes quasi-statiques dans  $G$

$$-\operatorname{div} \left( (a(y)\chi(y_n) + B(0)) \nabla \psi(\tau, y) \right) + \lambda \omega(y) \psi(\tau, y) = g(\tau, y) \chi(y_n)$$

avec  $\psi(y', y_n)$  périodique en  $y'$ .

## Première approche: méthode de factorisation

Terme source de la forme  $f_\epsilon(t, x) = g\left(\epsilon^2 t, \frac{x}{\epsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\epsilon}\right)$

$$A_\epsilon = \epsilon^2 \left( a\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\epsilon}\right) + B(x) \right)$$

où  $\chi(y) = 1 \Leftrightarrow |y| < 1$ .

On introduit la famille de problèmes quasi-statiques dans  $G$

$$-\operatorname{div} \left( (a(y)\chi(y_n) + B(0)) \nabla \psi(\tau, y) \right) + \lambda \omega(y) \psi(\tau, y) = g(\tau, y) \chi(y_n)$$

avec  $\psi(y', y_n)$  périodique en  $y'$ .

La solution factorisée serait

$$\phi_\epsilon \approx u(t/\epsilon^2, x) \psi\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right).$$

Il faut  $\lim_{y_n \rightarrow \pm\infty} \psi \not\rightarrow 0$ . Donc  $y \rightarrow \omega(y)$  à support compact.



Par exemple,

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_\epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \epsilon^2 \operatorname{div} \left( \left( a \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) + B(x) \right) \nabla \phi_\epsilon \right) + \lambda \omega_\epsilon \phi_\epsilon = f \left( \epsilon^2 t, \frac{x}{\epsilon} \right) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \text{ dans } \Omega, \\ \\ \phi_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \\ \phi_\epsilon(t=0) = \phi_0^\epsilon(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

avec  $\omega_\epsilon(x) = \omega \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) + \epsilon^2 P_1(x)$ . On montre alors

$\phi_\epsilon(t, x) = u_\epsilon(t/\epsilon^2, x) \psi(t, x/\epsilon)$ , avec  $u_\epsilon \rightarrow u_0$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} (B(x) \nabla u_0) + \lambda P_1(x) u_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ u(x', 0) = 1, \\ \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$



Par exemple,

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_\epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \epsilon^2 \operatorname{div} \left( \left( a \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) + B(x) \right) \nabla \phi_\epsilon \right) + \lambda \omega_\epsilon \phi_\epsilon = f \left( \epsilon^2 t, \frac{x}{\epsilon} \right) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \text{ dans } \Omega, \\ \\ \phi_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \\ \phi_\epsilon(t=0) = \phi_0^\epsilon(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

avec  $\omega_\epsilon(x) = \omega \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) + \epsilon^2 P_1(x)$ . On montre alors

$\phi_\epsilon(t, x) = u_\epsilon(t/\epsilon^2, x) \psi(t, x/\epsilon)$ , avec  $u_\epsilon \rightarrow u_0$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} (B(x) \nabla u_0) + \lambda P_1(x) u_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ u(x', 0) = 1, \\ \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Problème quasi-statique.



## Seconde Approche: Diffusion hétérogène

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_\epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (A_\epsilon \nabla \phi_\epsilon) + \lambda \omega_\epsilon \phi_\epsilon = f_\epsilon (t, x) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \text{ dans } \Omega, \\ \\ \phi_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \\ \phi_\epsilon(t = 0) = \phi_0^\epsilon(x) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Avec

$$A_\epsilon = \mu_0(x) \text{ pour } |x_n| > \epsilon$$

ou

$$\epsilon^n \mu_1(x) \text{ pour } |x_n| < \epsilon, \quad n = 1 \text{ ou } 2.$$



## Un problème proche (Sanchez-Palencia)

$$\begin{aligned}\Delta u^\epsilon &= f \text{ dans } \Omega \cap \{|x_1| > \epsilon h\} \\ \epsilon a \Delta u^\epsilon &= f \text{ dans } \Omega \cap \{|x_1| < \epsilon h\} \\ u_\epsilon &= 0 \text{ sur } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Avec transmission sur l'interface.

Résolution par développement asymptotiques raccordés. Dans la bande,

$$u^\epsilon = v^0(y_1, x_2) + \epsilon v^1(y_1, x_2) + \dots \text{ avec } y_1 = x_1/\epsilon$$



## Un problème proche (Sanchez-Palencia)

$$\begin{aligned}\Delta u^\epsilon &= f \text{ dans } \Omega \cap \{|x_1| > \epsilon h\} \\ \epsilon a \Delta u^\epsilon &= f \text{ dans } \Omega \cap \{|x_1| < \epsilon h\} \\ u_\epsilon &= 0 \text{ sur } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Avec transmission sur l'interface.

Résolution par développement asymptotiques raccordés. Dans la bande,

$$u^\epsilon = v^0(y_1, x_2) + \epsilon v^1(y_1, x_2) + \dots \text{ avec } y_1 = x_1/\epsilon$$

Au premier ordre:

$$\frac{\partial^2 v^0}{\partial y_1^2} = 0 \rightsquigarrow v^0(y_1, x_2) = A(x_2)y_1 + B(x_2).$$



Les conditions de transmission permettent de calculer

$$aA(x_2) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(0, x_2) = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}(0, x_2)$$

et

$$2hA(x_2) = u_1^0(0, x_2) - u_2^0(0, x_2)$$

On a donc deux solution macroscopiques raccordées

$$-\Delta u_1^0 = f \text{ pour } x \in \Omega \cap \{x_1 < 0\}$$

$$-\Delta u_2^0 = f \text{ pour } x \in \Omega \cap \{x_1 > 0\}$$

$$\text{et } \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}(0, x_2) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(0, x_2) = \frac{a}{2h} \left( u_1^0(0, x_2) - u_2^0(0, x_2) \right).$$



## Convergence 2 Echelles pour les Couches Limites

En prenant la même échelle de diffusion ( $\epsilon$ ) on peut montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left\| \chi_1 \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \phi_\epsilon \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \sqrt{\epsilon} \left\| \chi_1 \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \nabla \phi_\epsilon \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^N)} \leq C$$

ce qui donne l'existence dans la couche d'une limite *au sens de la convergence double échelle pour les couches limites* (Allaire & Conca), c'est à dire

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \phi_\epsilon(x) \psi \left( x', \frac{x}{\epsilon} \right) dx = \int_{x_n=0} \int_{Y'} \phi^1(x', y) \psi(x', y) dx' dy$$

pour tout  $\psi \in \mathcal{D} \left( \Sigma, C_{\#}^{\infty}(G) \right)$ .



On a

$$\begin{aligned}\chi_1\left(\frac{x_n}{\epsilon}\right)\phi_\epsilon(t, x) &\xrightarrow{2ECL} \chi_1(y_n)\phi_1(t, x', y), \\ \chi_1\left(\frac{x_n}{\epsilon}\right)\epsilon\nabla\phi_\epsilon(t, x) &\xrightarrow{2ECL} \chi_1(y_n)\nabla_y\phi_1(t, x', y).\end{aligned}$$

Ce qui donne, pour  $-1 < y_n < 1$ ,

$$-\operatorname{div}_y\left(\mu_1(x', y)\nabla_y\phi^1\right) = 0.$$



On a

$$\begin{aligned}\chi_1\left(\frac{x_n}{\epsilon}\right)\phi_\epsilon(t, x) &\xrightarrow{2ECL} \chi_1(y_n)\phi_1(t, x', y), \\ \chi_1\left(\frac{x_n}{\epsilon}\right)\epsilon\nabla\phi_\epsilon(t, x) &\xrightarrow{2ECL} \chi_1(y_n)\nabla_y\phi_1(t, x', y).\end{aligned}$$

Ce qui donne, pour  $-1 < y_n < 1$ ,

$$-\operatorname{div}_y\left(\mu_1(x', y)\nabla_y\phi^1\right) = 0.$$

Le terme source  $f$  n'apparaît pas!



## Diffusion hétérogène

On suppose

$$A_\epsilon = \mu_0(x) \left( 1 - \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \right) + \epsilon^2 \mu_1 \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \chi_1(y_n) \phi_\epsilon(t, x) &\xrightarrow{2ECL} \chi_1(y_n) \phi_1(t, x', y), \\ \chi_1 \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \epsilon \nabla \phi_\epsilon(t, x) &\xrightarrow{2ECL} \chi_1(y_n) \nabla_y \phi_1(t, x', y). \end{aligned}$$

En testant contre une fonction test  $(x', y) \rightarrow \psi(x', y)$  telle que

$$\psi(x', y) = \chi(y_n) \psi(x', y),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \left( \omega_\epsilon \frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t} - \epsilon^2 \operatorname{div}(\mu_1 \nabla \phi^\epsilon) + \lambda \omega_\epsilon \phi^\epsilon \right) \psi \left( x', \frac{x}{\epsilon} \right) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (f_\epsilon) \psi \left( x', \frac{x}{\epsilon} \right) dx$$

## Diffusion hétérogène

On suppose

$$A_\epsilon = \mu_0(x) \left( 1 - \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \right) + \epsilon^2 \mu_1 \left( x, \frac{x}{\epsilon} \right) \chi \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \chi_1(y_n) \phi_\epsilon(t, x) &\xrightarrow{2ECL} \chi_1(y_n) \phi_1(t, x', y), \\ \chi_1 \left( \frac{x_n}{\epsilon} \right) \epsilon \nabla \phi_\epsilon(t, x) &\xrightarrow{2ECL} \chi_1(y_n) \nabla_y \phi_1(t, x', y). \end{aligned}$$

En testant contre une fonction test  $(x', y) \rightarrow \psi(x', y)$  telle que  $\psi(x', y) = \chi(y_n) \psi(x', y)$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \left( \omega_\epsilon \frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t} - \epsilon^2 \operatorname{div}(\mu_1 \nabla \phi^\epsilon) + \lambda \omega_\epsilon \phi^\epsilon \right) \psi \left( x', \frac{x}{\epsilon} \right) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (f_\epsilon) \psi \left( x', \frac{x}{\epsilon} \right) dx$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \lambda \omega_\epsilon \phi^\epsilon \psi \left( x', \frac{x}{\epsilon} \right) dx = \int_{x_n=0} \int_Y \omega(x', y) \phi^1(x', y) \psi(x', y) dx' dy$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu_1 \nabla \phi^\epsilon) \psi \left( x', \frac{x}{\epsilon} \right) dx = \int_{x_n=0} \int_Y \mu_1(x', y) \nabla_y \phi^1(x', y) \nabla_y \psi(x', y) dx' dy$$



## Modèle asymptotique

On montre de plus que

$$(1 - \chi_1(y_n)) \phi_\epsilon(t, x) \rightarrow 0(2ECL).$$

On a obtenu

$$\omega(x', y) \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \operatorname{div}_y (\mu_1(x', y) \nabla \phi_1) + \lambda \omega(x', y) \phi_1 = f(t, x', y) \text{ pour } |y_n| < 1$$

$$\phi_1(t, x', y', 1) = \phi_1(t, x', y', -1) = 0$$

$$y' \rightarrow \phi_1(t, x', y', y_n) \quad \text{périodique.}$$

D'autre part

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \phi_\epsilon \rightarrow \phi_0 \mathbf{1}_{x_n > 0} + \phi_2 \mathbf{1}_{x_n < 0} \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

qui vérifient

$$\bar{\omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \operatorname{div} (\mu_0 \nabla \phi_i) + \lambda \bar{\omega} \phi_i = 0.$$

## Modèle asymptotique

On montre de plus que

$$(1 - \chi_1(y_n)) \phi_\epsilon(t, x) \rightarrow 0(2ECL).$$

On a obtenu

$$\begin{aligned} \omega(x', y) \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \operatorname{div}_y (\mu_1(x', y) \nabla \phi_1) + \lambda \omega(x', y) \phi_1 &= f(t, x', y) \text{ pour } |y_n| < 1 \\ \phi_1(t, x', y', 1) &= \phi_1(t, x', y', -1) = 0 \\ y' &\rightarrow \phi_1(t, x', y', y_n) \text{ périodique.} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \phi_\epsilon \rightarrow \phi_0 \mathbf{1}_{x_n > 0} + \phi_2 \mathbf{1}_{x_n < 0} \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

qui vérifient

$$\bar{\omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \operatorname{div} (\mu_0 \nabla \phi_i) + \lambda \bar{\omega} \phi_i = 0.$$

Quel raccord entre  $\phi_0$  et  $\phi_2$  ?



## Calcul formel et simulation

Un développement asymptotique formel indique qu'en dehors de la bande, il faut considérer  $\epsilon^{-1}\phi_\epsilon$ , qui satisfait

$$\bar{\omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu_0 \nabla \phi_i) + \lambda \bar{\omega} \phi_i = 0.$$

Avec

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_n}(x', 0) &= \mu_1 \int_{Y'} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x', y', +1) dy' \\ \mu_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}(x', 0) &= \mu_1 \int_{Y'} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x', y', -1) dy' \end{aligned}$$

(travail en cours..)



## Calcul formel et simulation

Un développement asymptotique formel indique qu'en dehors de la bande, il faut considérer  $\epsilon^{-1}\phi_\epsilon$ , qui satisfait

$$\bar{\omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu_0 \nabla \phi_i) + \lambda \bar{\omega} \phi_i = 0.$$

Avec

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_n}(x', 0) &= \mu_1 \int_{Y'} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x', y', +1) dy' \\ \mu_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}(x', 0) &= \mu_1 \int_{Y'} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x', y', -1) dy' \end{aligned}$$

(travail en cours..)

Calcul Dans la Bande

Données au bord

Simulation macroscopique