

# Simulation de processus de diffusion dans un milieu discontinu

Jean-François Delmas (CERMICS, École des ponts et chaussées)

Antoine Lejay (INRIA Lorraine/Institut Élie Cartan)

Miguel Martinez (INRIA Sophia-Antipolis)

**Objectifs** ① simuler la solution de

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \operatorname{div}(a(x) \nabla u(t, x))$$

par une méthode de Monte Carlo  $\equiv$  Simuler les trajectoires d'un processus de diffusion

② Simuler un processus de diffusion dans un milieu fissuré

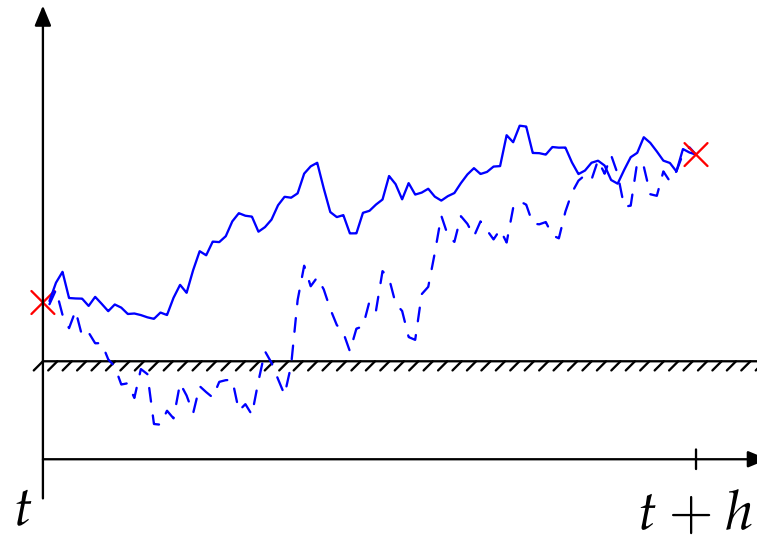
**Problèmes** ①  $a$  est discontinu

② Que se passe-t'il aux intersections ? Comment gérer le passage entre la matrice et les fissures (= discontinuité) ?

**Approche** Description exacte de ce qui se passe aux intersections et aux discontinuités  $\implies$  tous les problèmes sont similaires

## Simuler un processus de diffusion : difficultés

- Par où le processus est-il passé ?



- Les trajectoires sont irrégulières : toute trajectoire qui atteint un hyperplan en un instant  $t$  le touchera aussi en une suite d'instants  $t_1 > t_2 > \dots > t$  avec  $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t$ . Mais on passe un temps nul en zéro !

## Le mouvement brownien biaisé

$X$  processus de diffusion de générateur infinitésimal  $L = \text{div}(a\nabla\cdot)$

(c-à-d  $t^{-1}(\mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} Lf(x), \forall f$ )

On suppose  $a = \begin{cases} a_+ \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ a_- \text{ sur } \mathbb{R}_- \end{cases}$  et on pose  $\Phi(x) = \begin{cases} x/\sqrt{a_+} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ x/\sqrt{a_-} \text{ sur } \mathbb{R}_- \end{cases}$

$Y_t = \Phi(X_t)$  solution de  $Y_t = B_t + \alpha L_t^0(Y)$ ,

- $B_t$  mouvement brownien
- $\alpha = (\sqrt{a_+} - \sqrt{a_-})/(\sqrt{a_+} + \sqrt{a_-})$
- $L_t^0(Y)$  *temps local* de  $Y$  en 0 (ne croît que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle)

$\rightsquigarrow Y$  est appelé le *mouvement brownien biaisé de paramètre  $\alpha$*

$\equiv$  se comporte comme un brownien en dehors de 0

mais a une probabilité  $(\alpha + 1)/2$  d'atteindre  $x$  avant  $-x$  pour  $x > 0$

## Temps passé dans les fissures ?

**Objectif** Permettre de coupler deux algorithmes distincts (l'un pour les fissures, l'autre pour la matrice)

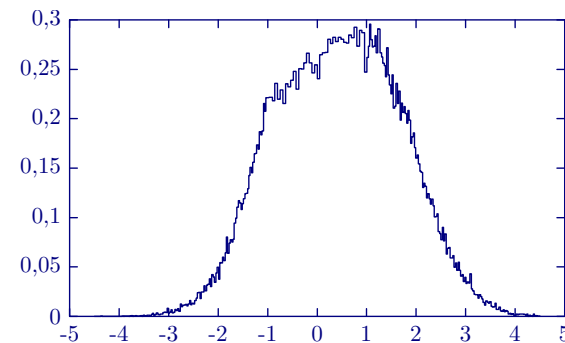
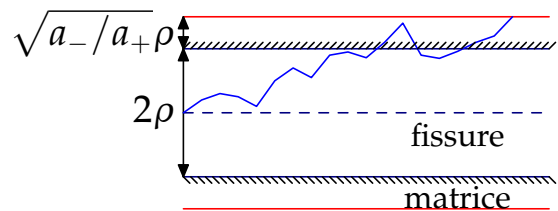
La fissure est vue comme un tube

Loi de Darcy : condition de transmission à l'interface fissure/matrice

$$a_- \nabla u(t, \rho-) = a_+ \nabla u(t, \rho+)$$

Le temps d'atteinte de l'interface fissure/matrice ne caractérise rien

⇒ On calcule le temps mis pour atteindre une zone un peu éloignée de l'interface fissure/matrice (utilisation du mouvement brownien biaisé)



p.d.f. des particules à l'instant  $t = 1$  avec  $\rho = 1, a_- = 1, a_+ = 4, X_0 = 1$

**Questions** ① Calculer/simuler ce temps

② Que se passe-t'il quand  $\rho \rightarrow 0$  ?

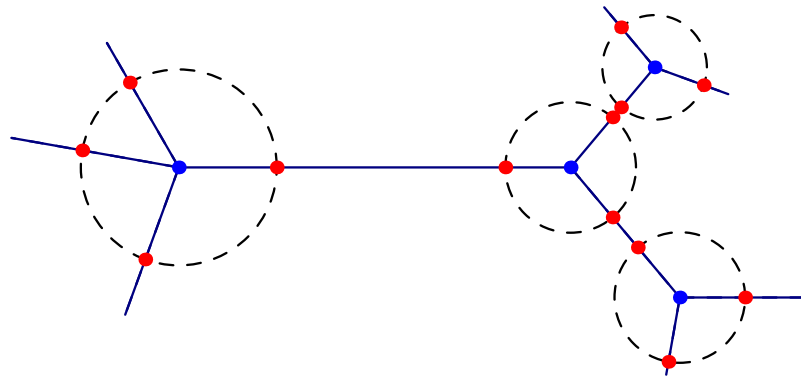
## Diffusion dans les fissures 2d

Le réseau de fissures est vu comme un graphe

Processus de diffusion sur un graphe  $\equiv$  extension du mvt brownien biaisé  
à chaque intersection

On calcule le temps passé dans le réseau de fissures, et on simule les trajectoires  
d'un processus de diffusion jusqu'à cet instant

**Algorithme** variation de la méthode de marche aléatoire sur les sphères



$\rightsquigarrow$  marche aléatoire sur les points bleus et rouges (alternativement) avec le  
temps proprement incrémenté

$\equiv$  « trace » de la trajectoire sur les points bleus et rouges

## Travaux en cours et problèmes ouverts

- Simulation d'un processus de diffusion de générateur infinitésimal  $\text{div}(a\nabla\cdot)$  dans le cas général

Méthodes dans le cas de la dimension  $d = 1$

- variation de la méthode de marche aléatoire sur les sphères
- approximation par une marche aléatoire
- schéma d'Euler

Cas de la dimension  $d > 1$  ?

- Prise en compte d'un terme convectif

⇒ thèse de Pierre Étoré (INRIA/IECN) débutée en octobre 2003

- Test des algorithmes sur des cas réels
- Modèles de fissures plus réalistes