Des outils pour l'adaptation de maillage anisotrope en dimension 2 et 3

F. Hecht

Laboratoire Jacques-Louis Lions

Université Pierre et Marie Curie

Paris, France

http://www.ann.jussieu.fr/~hecht

mailto:hecht@ann.jussieu.fr

PLAN

- Introduction
- un schéma d'adaptation simple
- Métrique et Maillage unité
- Les Générateurs de maillages adaptés
- Outil lié aux métriques
  - intersection, interpolation, gradation
- Métrique versu indicateur d'erreur
- Métrique pour élément fini $P1$
- Métrique pour élément fini $P2$
- Problème de convergence (pas le temps)
- `http://www.ann.jussieu.fr/~hecht/freefem++.htm`
- Exemples / Demo of `FreeFem++`
- Conclusion / Future (pas le temps)

Introduction : Le vrai problème

Nous voulons résoudre une EDP, dans un domain Ω avec la méthode des éléments finis,

Le plus vite possible avec une precision donnée ε.

The theorie of error indicator given, the level of the error, but how to compute the local mesh size to get a equidistribuate error.

Scheme of mesh adaption

i=0 ;

Soit ${\mathcal{T}_h}^i$ initial mesh

loop

compute u^i the solution on mesh ${\mathcal{T}_h}^i$

evaluate the level of error ε

si $\varepsilon < \varepsilon_0$ break

compute the new local mesh size

construct a mesh according to prescribe the mesh size.

Remarque : comment transformé un indicateur d'erreur local η_K en carte de taille. Moralement, il faut estimer :

$$\frac{\partial \eta_K}{\partial h_i}$$

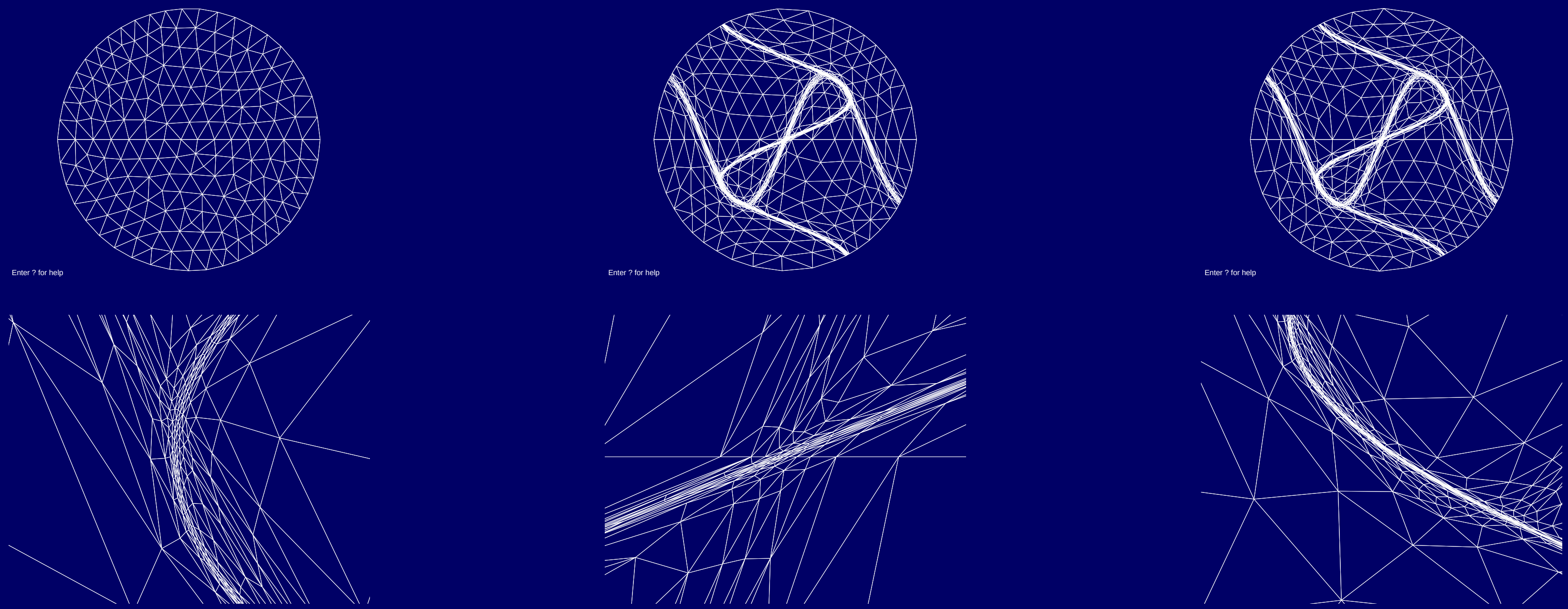
A main IDEA

- The difficulty is to find a tradeoff between the error estimate and the mesh generation, because this two work are strongly different.
- To do that, we propose way based on a metric $\mathcal{M}$ and unit mesh w.r.t $\mathcal{M}$
- The metric is a way to control the mesh size.
- remark : The class of the mesh which can be created by the metric, is very large.

Example of mesh adapted for 2 functions

$$f_1 = (10 * x^3 + y^3) + atan2(0.001, (sin(5 * y) - 2 * x))$$

$$f_2 = (10 * y^3 + x^3) + atan2(0.01, (sin(5 * x) - 2 * y)).$$



Metric / unit Mesh

In Euclidean geometry the length $|\gamma|$ of a curve γ of $\mathbb{R}^d$ parametrized by $\gamma(t)_{t=0..1}$ is

$$|\gamma| = \int_0^1 \sqrt{< \gamma'(t), \gamma'(t) >} dt$$

We introduce the metric $\mathcal{M}(x)$ as a field of $d \times d$ symmetric positive definite matrices, and the length ℓ of Γ w.r.t $\mathcal{M}$is :

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{< \gamma'(t), \mathcal{M}(\gamma(t))\gamma'(t) >} dt$$

The key-idea is to construct a mesh where the lengths of the edges are close to 1 accordingly to $\mathcal{M}$.

Remark on the Metric

Let S be a surface , parametrized by

$$F(u) \in R^3 \quad \text{with}(u) \in \mathbb{R}^2, \text{ and let } \quad \Gamma(t) = F(\gamma(t)), t \in [0,1]$$

be a curve on the surface. The length of the curve Γ is

$$|\Gamma| = \int_0^1 \sqrt{< \Gamma'(t), \Gamma'(t) >} dt$$

$$|\Gamma| = \int_0^1 \sqrt{< \gamma'(t), {}^t\partial F \partial F \gamma'(t) >} dt$$

and on a parameteric surface the metric is

$$\mathcal{M} = {}^t\partial F \partial F$$

the Metric versus mesh size

at a point P,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}$$

where $R = (v_1, v_2)$ is the matrix construct with the 2 unit eigenvectors v_i and λ_1, λ_2 the 2 eigenvalues.

The mesh size h_i in direction v_i is given by $1/\sqrt{\lambda_i}$

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i^2}$$

Remark on metric :

If the metric is independant of position, then geometry is euclidian. But the circle in metric become ellipse in classical space.

Infact, the unit ball (ellipse) in a metric given the mesh size in all the direction, because the size of the edge of mesh is close to 1 the metric.

If the metric is dependant of the position, then you can speak about Riemmanian geometry, and in this case the sides of triangle are geodesics, but the case of mesh generation, you want linear edge.

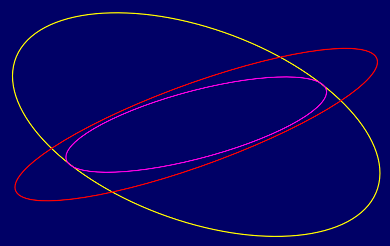
Generateur de maillage qui marche bien

- mefisto (web) mailleur isotrope (arbre) à partir de la CAO 2D-3D
- modulef (web) mailleur isotrope (manuel en 3D), sans CAO 2D-3D
- emc2 (web) mailleur isotrope (Delaunay) et CAO 2D
- bl (web), blsurf mailleur anisotrope (Delaunay), fichier des patchs 2D,Surface
- bamg (web) mailleur anisotrope (Delaunay), geométrie maillage 2D
- yams adaptateur de maillage anisotrope (Delaunay), geométrie maillage Surface
- mef++ (web ?) adaptateur de maillage anisotrope (Delaunay), geometrie CAO 3D
- ghs3d, gamic mailleurs anisotrope (Delaunay), géométrie maillage 3D

Metrix Tools

– The unit ball $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ in a metrix $\mathcal{M}$ plot the maximum mesh size on all the direction.
If you two unknows u and v, we just compute the metrix $\mathcal{M}_v$ and $\mathcal{M}_u$, find a metrix $\mathcal{M}_{uv}$ call intersection such that :

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{uv}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_u) \cap \mathcal{B}(\mathcal{M}_v)$$



Interpolation de Metrique

- Generalement, la Metrique, n'est connue qu'aux sommets du maillage, il faut donc interpolé.
- l'interpolation direct des matrices (revient à dire que la fonction est P_3 (on genere trop de points).
- l'iterpolation en h revient à interpoler avec

$$\mathcal{M}(t) = \left((t)\mathcal{M}_A^{-\frac{1}{2}} + (1-t)\mathcal{M}_B^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2}$$

  car $1/h^2 \sim \lambda$ (trop lent)
- une derniere solution qui n'est pas mauvaise :

$$\mathcal{M}(t) = \left((t)\mathcal{M}_A^{-1} + (1-t)\mathcal{M}_B^{-1} \right)^{-1}$$

remarque : si $h(t)$ est affine alors on obtient une progression géométrique.

Remark

- The quality of the generated triangles, depend on the variation of the $\mathcal{M}$ in space
- The idea is to bound the variation of the $\mathcal{M}$

  H- variation of an edge PQ

$$v(PQ) = \frac{h_Q - h_P}{|PQ|}$$

  where h_Q (resp. $h(P)$) is the mesh size in Q (resp. P) in direction PQ.

- let α be $Max(v(PQ))$ an all mesh edges PQ, the goal H-variation
- let β be the maximal ratio of the Euclidean length of all the two adjacent and opposite edges in a new unit mesh

Result :

$$\alpha \simeq ln(\beta)$$

Metric computation with Hessien for $P1$ Lagrange finite element

The le Cea lemma say : the error is bound with the interpolation error. In a classical Adaption way, the metric tensor $\mathcal{M}$ is constructed in order to equilibrate the error of interpolation.

Find a metric tensor $\mathcal{M}$, such that, the adapted mesh constructed from $\mathcal{M}$ minimizes the interpolation error :

$$||u - \Pi_h(u)||_X$$

where Π_h is the finite element P_1 interpolation operator

the idea is $\quad \mathcal{M} = \frac{C}{\varepsilon_0^p} |\partial_{ij} u|^p$

where $p = \frac{1}{2}, 1, 1, 2$ depend of the norme $X = L^2, L^\infty, H^1, W_1^\infty$.

En dimension 2

With the $P1$ finite element the error interpolation is :

$$||u - \Pi_h u||_\infty^T \leq \frac{1}{2} \sup_{x,y \in T} \left({}^t\vec{ax} \, |\mathcal{H}(y)| \, \vec{ax} \right)$$

where a is a vertex of triangle T

where $|\mathcal{H}|$ have the same eigen-vectors and the eigen-value of $|\mathcal{H}|$ is the abs of the eigen-value of $\mathcal{H}$,

We take $\mathcal{M} = \frac{0.5}{\varepsilon_0} \quad |\mathcal{H}|$ and where ε_0 is the expected error.

La solution u_h est discrète

Nous voulons calculer $\mathcal{H}$ d'une fonction $P1$ par morceaux. Approximation du Hessien $\mathcal{H}_h^k$ à chaque sommet k

Méthode 1

$$\mathcal{H}_{hij}^k = -\frac{1}{3|\Omega_k|}\int_{\Omega_k} \partial_i u_h \partial_j w^k$$

Remarque : cette approximation ne converge pas si $h \rightarrow 0$, et le stencil est juste formé des triangles contenant k, il faut lisser.

Méthode 2 faire une double projection L^2 :

$$\mathcal{H}_h = \Pi_{L^2}\Big(\nabla \Pi_{L^2}\big(\nabla u_h\big)\Big)$$

où Π_{L^2} est la projection L^2 sur l'espace des fonctions éléments finis $P1$ Lagrange avec condensation de masse.

Remarque : cette approximation converge t'elle si $h \rightarrow 0$?. Le stencil est formé des triangles voisins des triangles contenant k.

Problème ouvert

Que faut il, pour que la méthode adaptation proposé converge, juste pour le problème d'interpolation, (on calcul le Hessien à partir de l'interpolation)

Question : construire un schéma pour calculer une approximation du Hessien $\mathcal{H}_\varepsilon$ de l'interpolation u_ε de u sur le maillage adapté à une erreur ε, avec le vrai Hessien.

$$\varepsilon \longrightarrow 0, \quad u_\varepsilon \longrightarrow u, \quad \mathcal{H}_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{H}$$

Metric with a local relative error

Find a metric tensor $\mathcal{M}$, such that, the adapted mesh constructed from $\mathcal{M}$ minimizes the relative interpolation error :

$$\frac{\|u - \Pi_h(u)\|_X}{\|u\|_X}$$

Remark : This error is adimensional

In this case we take :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{|\mathcal{H}|^p}{max(10^{-10}, |U|^p)}$$

This comes from a dimensional analysis.

Métrique pour de élément fini $P2$

Il semble naturel, de dire que l'erreur d'interpolation dépend de la dérivé troisième $u^{(3)}$ de la solution

Donc comment construire une métrique en fonction de $u^{(3)}$.

L'erreur d'interpolation $\mathcal{E}$ ressemble à

$$\mathcal{E} \sim \sup_{a,b,c \in K} \frac{1}{6} |u^{(3)}(c)(\vec{ab}, \vec{ab}, \vec{ab})|$$

Le but est de construire un maillage telle que

$$|u^{(3)}(c)(\vec{ab}, \vec{ab}, \vec{ab})| \leq \varepsilon_0$$

le problèmes est de construire des triangles contenue dans la « boule » $\sqrt[3]{\varepsilon_0} B_c$ avec $B_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / |u^{(3)}(c)(\vec{x}, \vec{x}, \vec{x})| \leq 1\}$

Métrique pour de élément fini $P2$/ suite

Soit $\mathcal{A}$ une matrice symétrique définie positive de boule unité la plus grande possible tel que

$$|u^{(3)}(c)(\vec{x},\vec{x},\vec{x})| \quad \leq 1 => \quad (\vec{x},\mathcal{A}_c\vec{x}) \leq 1$$

Alors la métrique est :

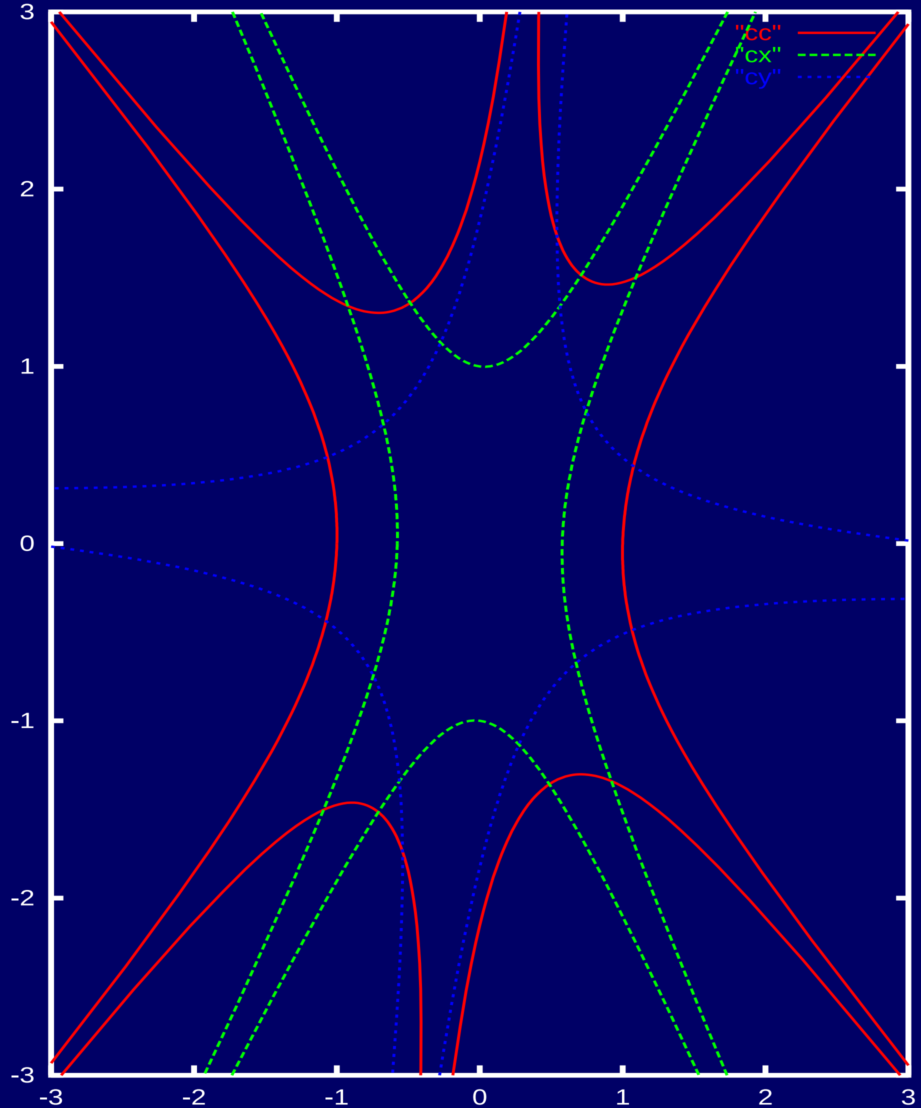
$$\mathcal{M}_c = \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\mathcal{A}_c$$

Une approximation est de prendre la métrique

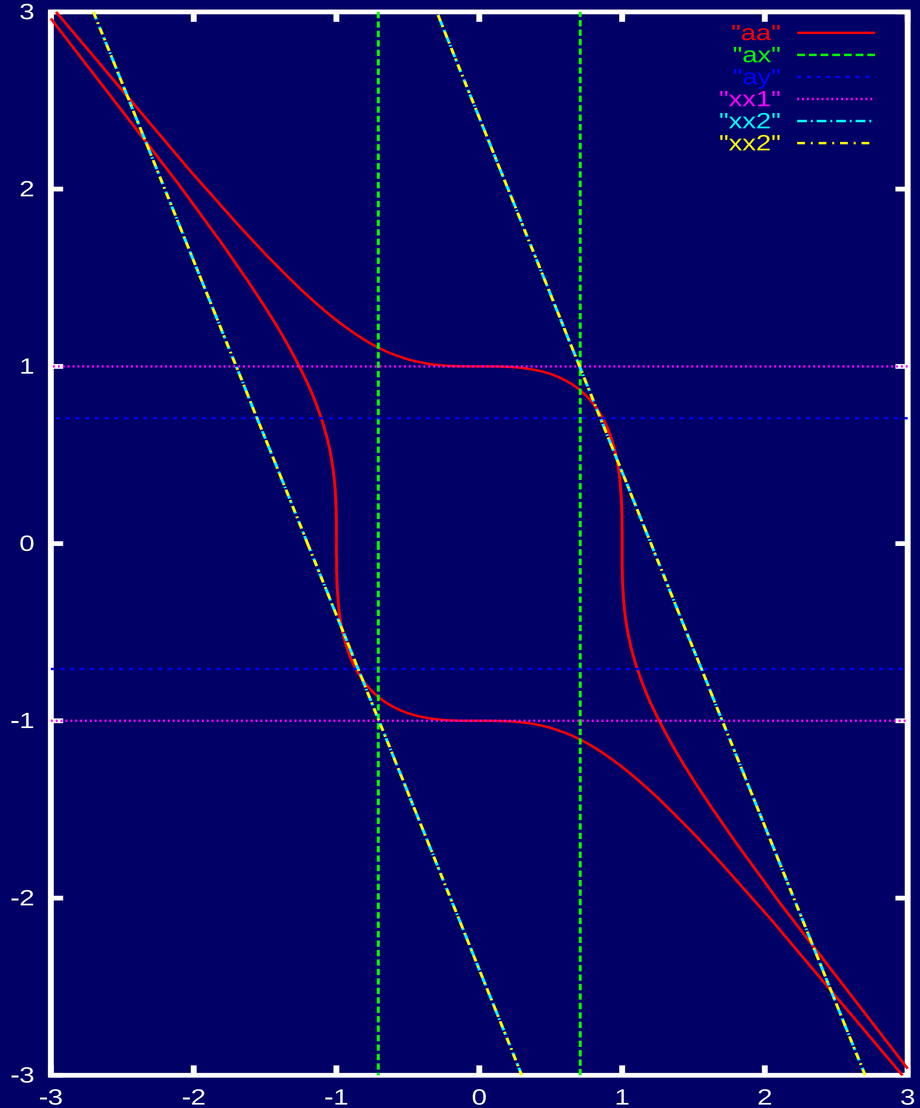
$$\mathcal{M}_c = \varepsilon^{-1}(\mathcal{H}_{u_x} \cap \mathcal{H}_{u_y})$$

où opérateur $\cap$ construie une metrique de boule unité maximale contenue dans l'intersection des boules unitées des 2 métriques.

$$x^3 - \frac{1}{10}x^2y - xy^2 + \frac{1}{10}x^3$$



$$x^3 + y^3$$



Conclusion

Les métriques sont une méthode très puissantes pour faire de l'adaptation de maillage.

Mais, il y a un manque de support mathématique.

Problème ouvert :

Trouver de bons schémas pour calculer le Hessien.

Logiciel sur la Toile

In the directory
`ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Gamma/` on INTERNET :

– 2D CAD+ mesh generator :
  `Emc2.tar.gz`
  written in f77 translated in C
– 2D adaption loop
  `bamg.tar.gz`
  written in C++
– 2D Compressible Navier Stokes solver
  written in F77
  `NSC2KE.tar.gz`
– FreeFem++ : a 2D PDE solve
  `http ://www.ann.jussieu.fr/~hecht/freefem++.htm`