ANALYSE DE SENSIBILITÉ ET ESTIMATION DE PARAMÈTRES DE TRANSPORT POUR UNE ÉQUATION DE DIFFUSION, APPROCHE PAR ÉTAT ADJOINT

—

F. Clément	N. Khvoenkova	(Inria)
A. Cartalade	P. Montarnal	(CEA)

ÉQUATION DE DIFFUSION

$$\omega(r)^*\frac{\partial C}{\partial t}(r,t) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD(r)^\dagger\frac{\partial C}{\partial r}(r,t)\right) + \lambda^\ddagger\omega(r)C(r,t)^\S = 0$$

$$\text{(CL)}\begin{cases} C(r_0,t) = C(r_0,0) + \alpha^\P D(r_0)\displaystyle\int_0^t \frac{\partial C}{\partial r}(r_0,\tau)d\tau \\ D(r_L)\dfrac{\partial C}{\partial r}(r_L,t) = 0 \end{cases}$$

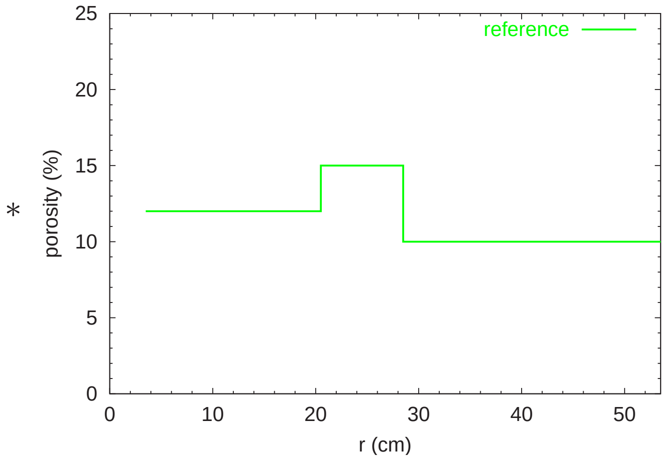
$$\text{(CI) } C(r,0) = 0$$

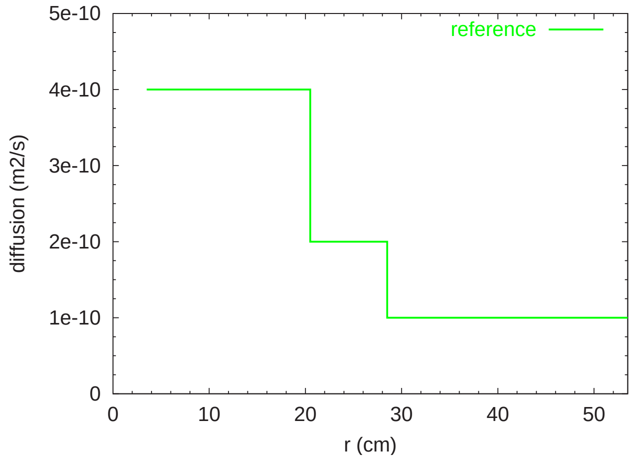
Problème discret $r_l = l\frac{r_L - r_0}{L}$ et $t^n = n\frac{t_{\max}}{N}$

$$\begin{cases} (M(\omega) + K(\omega, D))C^{n\|} = M(\omega)C^{n-1}, \quad n = 1,\ldots,N \\ C^0 = (C_0^0, 0, \ldots, 0)^T \end{cases}$$

PROBLÈME INVERSE

Équation d'état $E(p^*, u^\dagger) = 0$



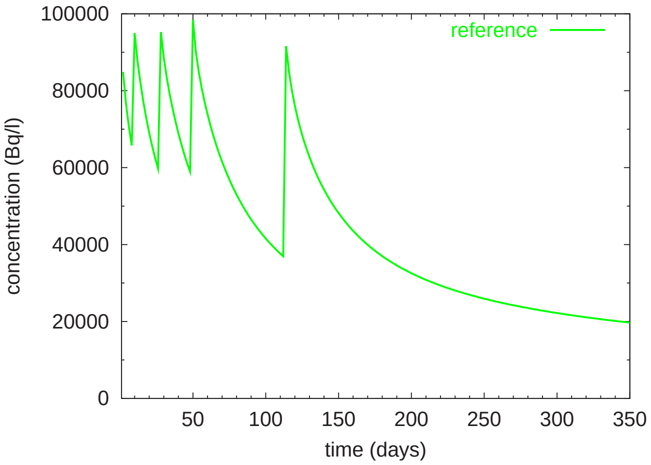


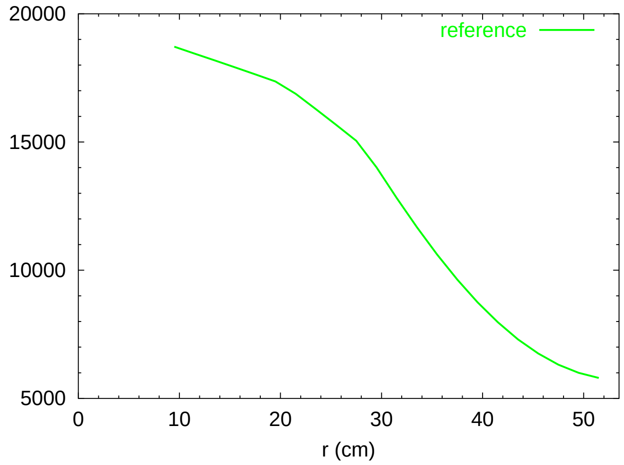
paramètre : $p = \left(\frac{\omega}{\omega_0}, \frac{D}{D_0}\right)$

†variable d'état : $u = C = (C^1, \ldots, C^N)$

Modèle direct $F(p) = M^{\ddagger}(u_p{}^{\S})$

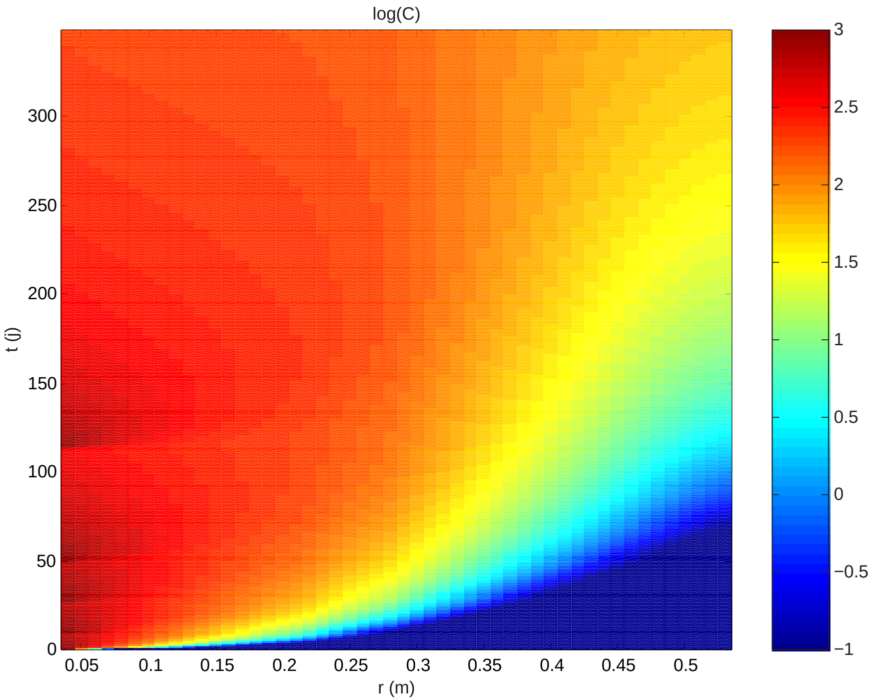
$\ddagger$





mesures : $(\nu C_0, \mu C^N)$

$\S$



u_p = solution de : $E(p, u) = 0$

Fonction coût $J = \|F(p) - d\|^2$

Problème inverse $\min_p J \Rightarrow$ calcul de $\nabla_p J$[¶]

Analyse de sensibilité SVD de $F'(p)$[‖]

[¶] $= F'(p)^T (F(p) - d)$

[‖] =matrice de sensibilité

PARAMÉTRISATION

Représentation fine de la physique ($\dim p \gg 1$)	vs.	Estimation unique et stable du paramètre ($\dim p \sim 1$)

$\Rightarrow$ choix de $P : m \longmapsto p$ avec $1 < \dim m \ll \dim p$

$$\begin{array}{llll} p & \rightsquigarrow P(m) & \qquad \nabla_p J & \rightsquigarrow P'(m)^T \nabla_p J \\ F(p) & \rightsquigarrow F \circ P(m) & \qquad F'(p) & \rightsquigarrow F'(P(m))P'(m) \end{array}$$

Exemple zonation

MÉTHODE DE L'ÉTAT ADJOINT (G. Chavent)

Lagrangien $\mathcal{L}(p, u, \lambda^*) = G(M(u)) + \langle E(p, u), \lambda \rangle$

Théorème $\nabla_p G = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(p, u_p, \lambda_p)$ avec

$$\begin{cases} u_p \text{ solution de } & E(p, u) = 0 \\ \lambda_p \text{ solution de } & \forall \delta u \ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(p, u_p, \lambda)\delta u = 0^\dagger \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} G(v) = \langle v, e_i \rangle & \rightsquigarrow & \nabla_p G = F'(p)^T e_i{}^\ddagger \\ G(v) = \langle v, g_v \rangle & \rightsquigarrow & \nabla_p G = F'(p)^T g_v \\ G(v) = \|v - d\|^2 & \rightsquigarrow & \nabla_p G = \nabla_p J \end{array}$$

*variable adjointe

DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES (SVD)

- Généralisation des valeurs propres aux matrices rectangulaires

$$\text{vs} = \sqrt{\text{vp}(A^T A)}$$

$A =$ matrice à I lignes et J colonnes

$$A = USV^T$$

$V = (v_j)$: vecteurs singuliers de l'espace de départ*
$U = (u_i)$: vecteurs singuliers de l'espace d'arrivée† (unitaires)

$S = \text{diag}(s_k)$: valeurs singulières $(s_{k+1} \geq s_k \geq 0)$

$$Av_k = \begin{cases} s_k u_k & \text{si } k \leq I, J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ANALYSE DE SENSIBILITÉ - 1

$d_0 = F(p_0)$ $\qquad d = F(p_0) + \varepsilon$ $\qquad p = p_0 + \delta p$

$F'(p_0) = USV^T$ $\qquad \varepsilon = \sum_i \varepsilon_i u_i$ $\qquad \delta p = \sum_j \delta p_j v_j$

$$F(p) \simeq F(p_0) + F'(p_0)\delta p$$

$$J \simeq \|F'(p_0)\delta p - \varepsilon\|^2 = \|\sum_{k \leq I,J} \delta p_k s_k u_k - \sum_i \varepsilon_i u_i\|^2$$

$$\Rightarrow \delta p_k^\star = \begin{cases} \frac{\varepsilon_k}{s_k} & \text{si } s_k > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ANALYSE DE SENSIBILITÉ - 2

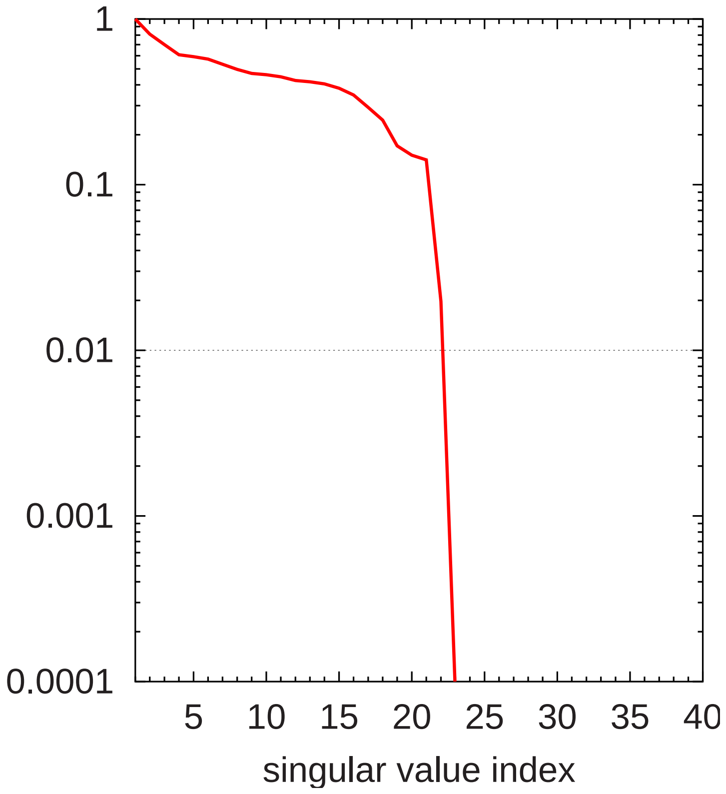
Si $F(0) = 0$, alors $0 = F(p_0 - p_0) \simeq F(p_0) - F'(p_0)p_0$
d'où $\|d_0\| = \|F(p_0)\| \simeq \|F'(p_0)p_0\| \leq s_1\|p_0\|$

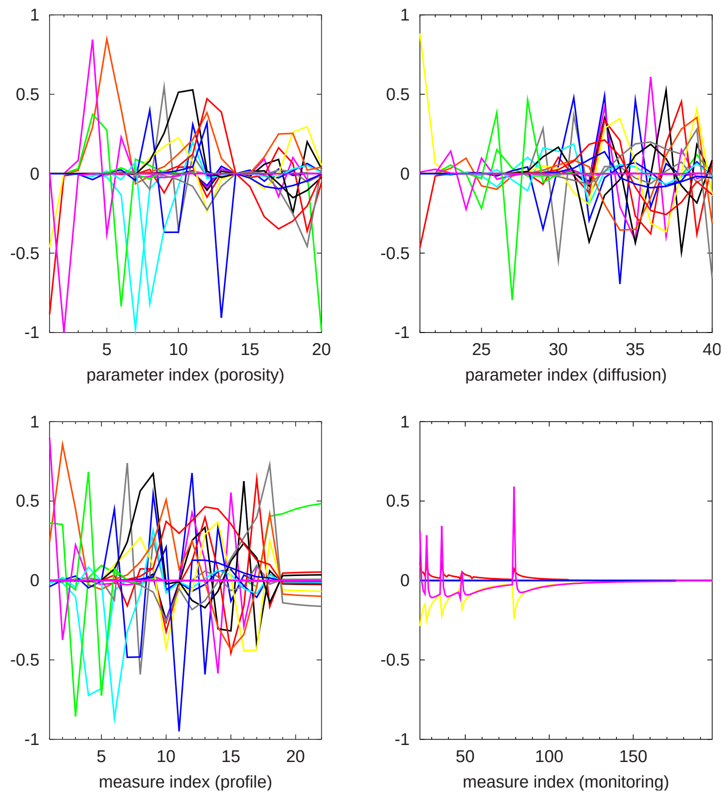
soit $\dfrac{\delta p_k^\star}{\|p_0\|} \leq \dfrac{\varepsilon_k}{s_k}\dfrac{s_1}{\|d_0\|} = \dfrac{s_1}{s_k}\dfrac{\varepsilon_k}{\|d_0\|} \leq \dfrac{s_1}{s_k}\dfrac{\|\varepsilon\|}{\|d_0\|}$

$$\text{Donc } \frac{\|\varepsilon\|}{\|d_0\|} \leq \sigma_d \text{ et } \frac{s_k}{s_1} \geq \frac{\sigma_d}{\sigma_p} \Rightarrow \frac{\delta p_k^\star}{\|p_0\|} \leq \sigma_p$$

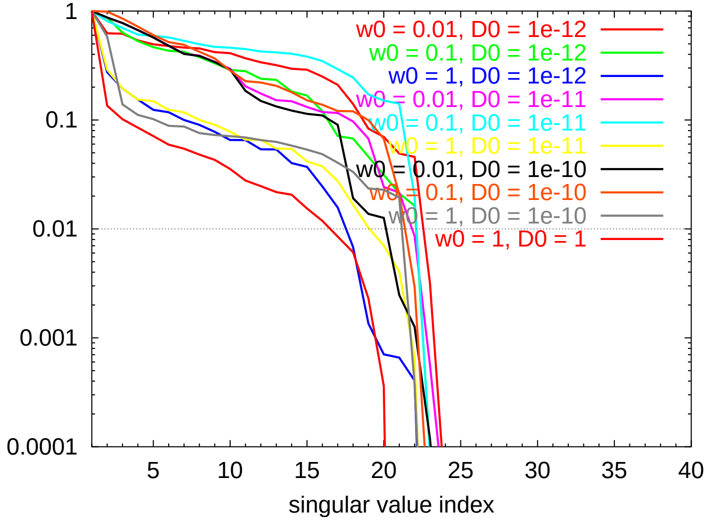
$\Rightarrow$ on définit $K = \sup_{\frac{s_k}{s_1} \geq \frac{\sigma_d}{\sigma_p}}\{k\}$ qui évalue le nombre de paramètres identifiables de façon stable

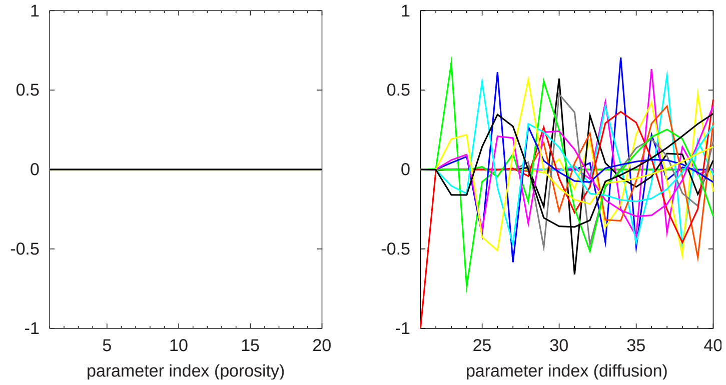
ÉLÉMENTS SINGULIERS



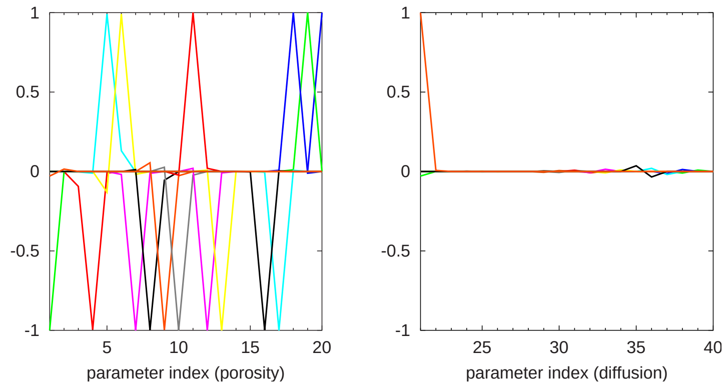


INFLUENCE DE LA NORMALISATION (ω_0, D_0)



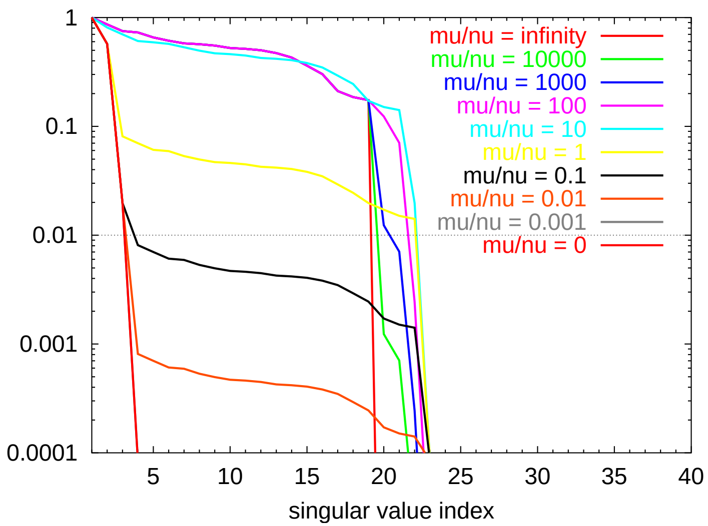


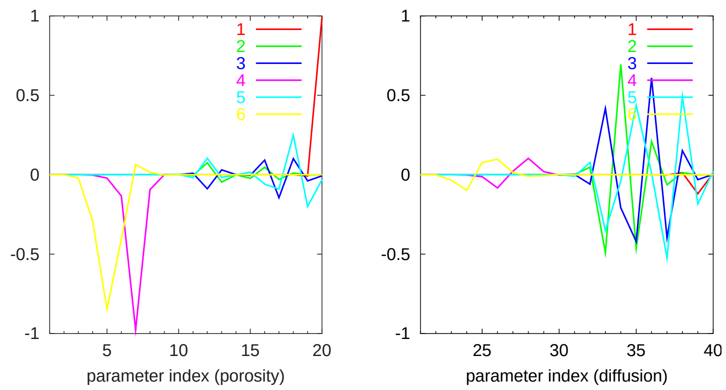
$$\omega_0 = D_0 = 1$$



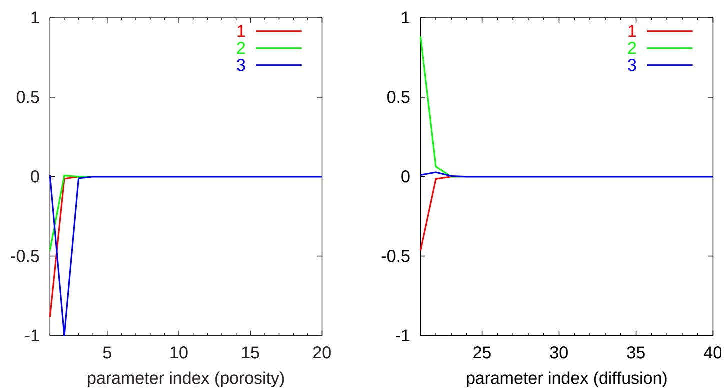
$$\omega_0 = 1,\ D_0 = 10^{-12}$$

INFLUENCE DES POIDS SUR LES MESURES (μ, ν)



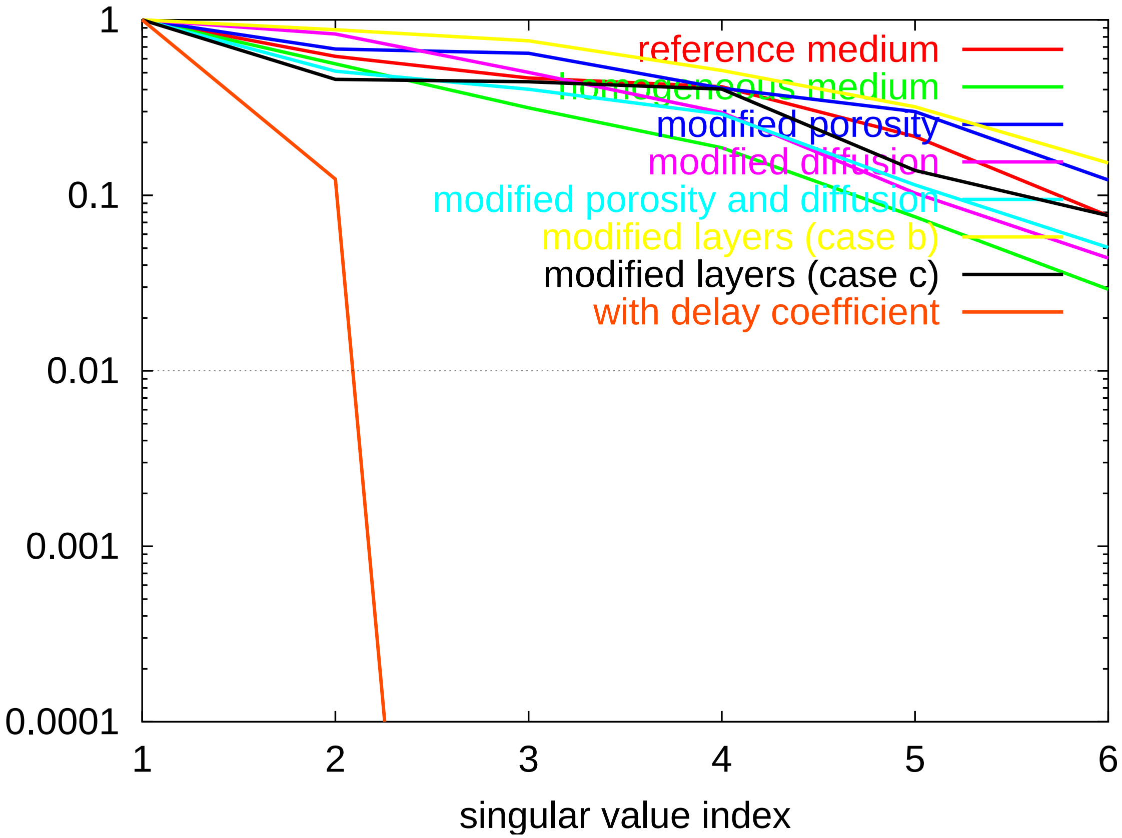


$$\mu = 1,\ \nu = 0\ (k \leq 6)$$

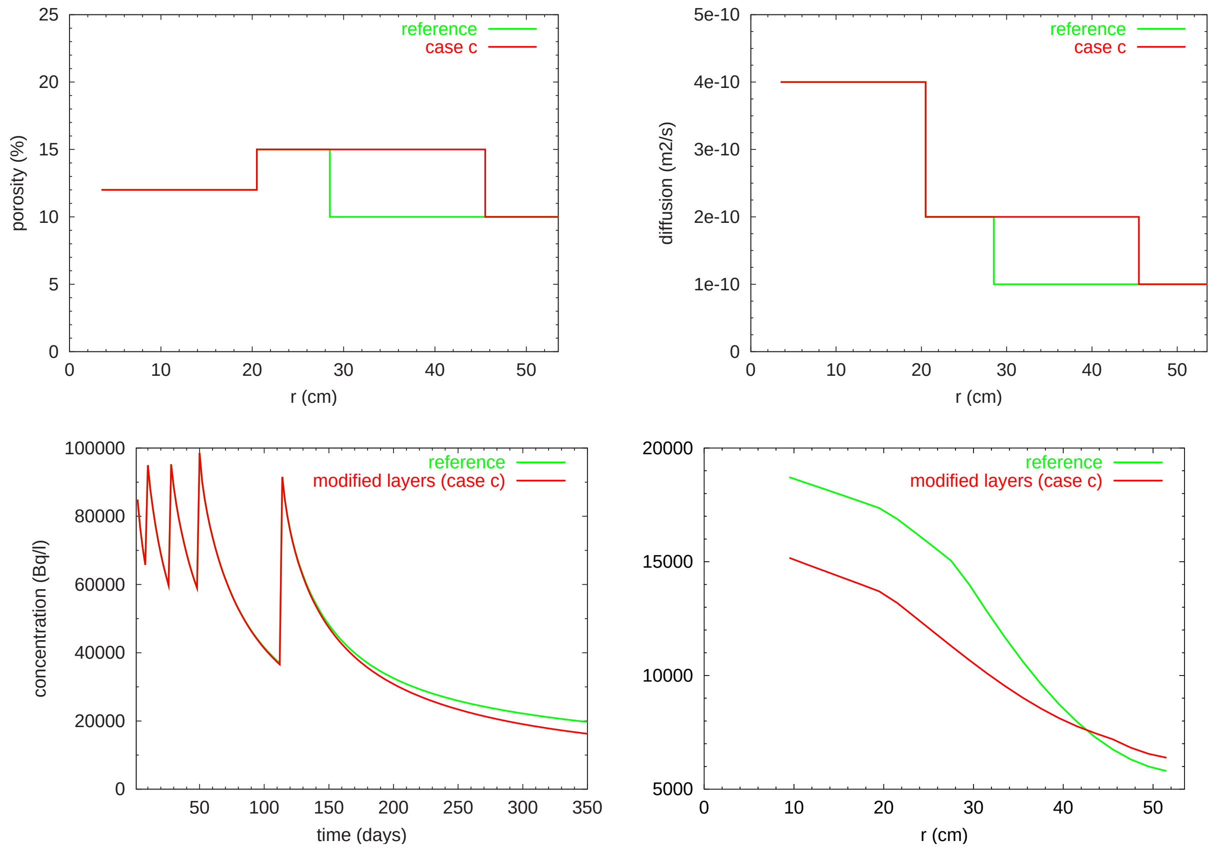


$$\mu = 0,\ \nu = 1$$

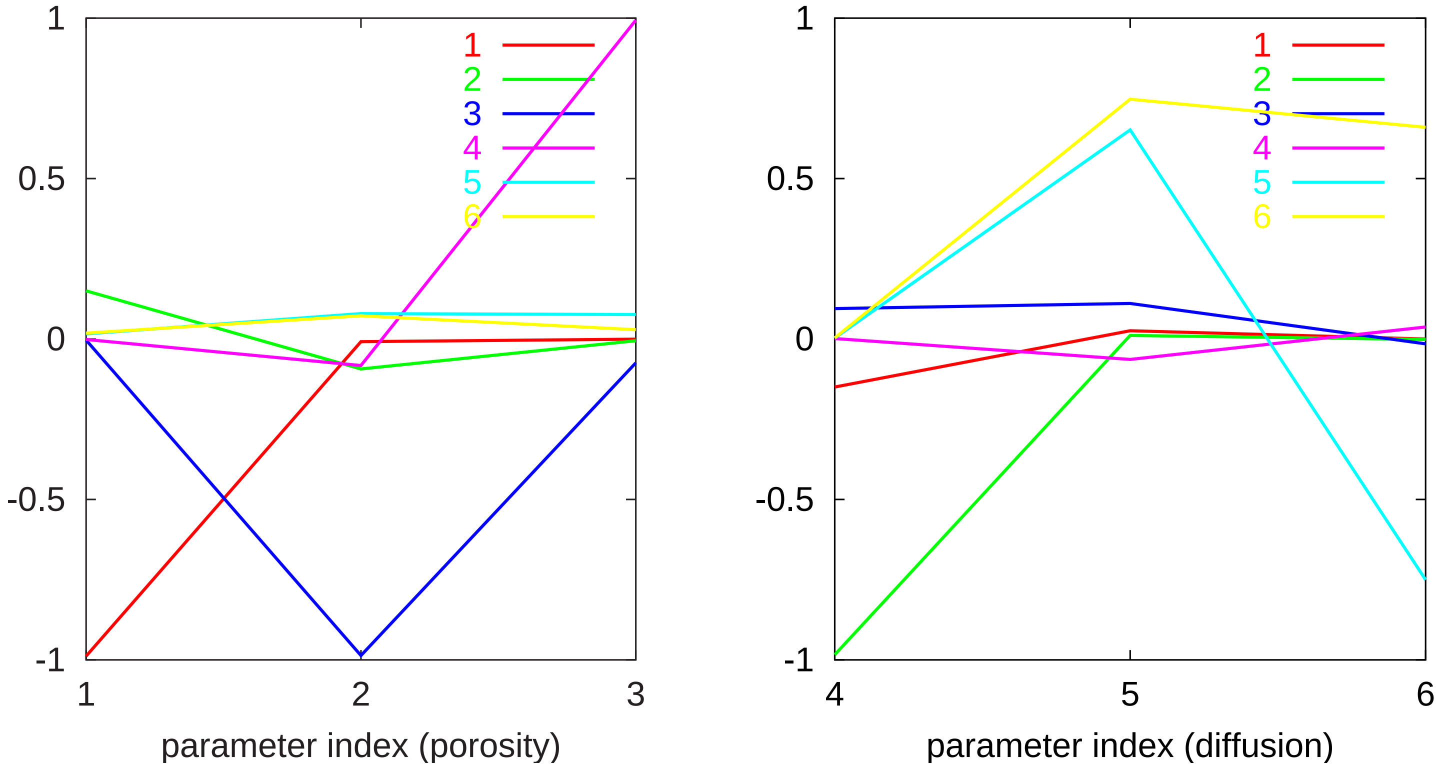
INFLUENCE DU POINT ÉTUDIÉ
valeurs singulières (3 zones)



INFLUENCE DU POINT ÉTUDIÉ
paramètre, mesures



INFLUENCE DU POINT ÉTUDIÉ
vecteurs singuliers dans l'espace des paramètres (3 zones)



UTILITÉ LA SVD POUR L'INVERSION

Analyse (locale) de sensibilité permet d'évaluer le nombre de paramètres identifiables de façon stable (et de les lister)

⇒ choix de ω_0, D_0 et μ, ν (calibration)

⇒ évaluation de la non-linéarité du modèle direct

⇒ qualification/choix de la paramétrisation

⇒ qualification/choix du dispositif expérimental

- Le calcul peut être coûteux (3D ?)