

Ecoulement tangentiel sur une surface rugueuse et loi de Navier

exposé aux **Journées des GDRs MOMAS**
et **PARIS**

MICRO → MESO → MACRO ;

**Modélisation par changement
d'échelles du Micro au Continu**

Université Claude Bernard Lyon 1, ISTIL,
Campus La Doua, 18-19/9/2003.

par

Andro Mikelić

LaPCS, UFR Mathématiques

Université Claude Bernard Lyon 1

En physique des fluides newtoniens, la condition d'adhérence à la paroi est justifiée seulement en présence de viscosité. Comme le fluide ne peut pas traverser la paroi, sa vitesse normale est égale à zéro. C'est la condition de non-pénétration. En revanche, l'absence de glissement n'est pas très intuitive. Il s'agit d'une loi établie expérimentalement et contestée par Navier lui-même (voir l'article de Navier dans les *Mem. Acad. R. Sci. Inst. France*, 369 (1827)). Navier pensait que la vitesse tangentielle devait être proportionnelle au cisaillement (la loi de Navier). La théorie cinétique a confirmé la loi de Navier, mais avec le coefficient de frottement proportionnel au chemin moléculaire moyen libre (voir e.g. le livre de Panton 1984). En conséquence pour les fluides réels ce coefficient vaut zéro et confirme la condition d'adhérence à la paroi.

Dans beaucoup d'applications la frontière est rugueuse comme dans le cas des frontières complexes en dynamique des écoulements géophysiques. La taille du domaine de calcul (mer, océan) est tellement grande que les détails de la côte peuvent être considérés comme des rugosités.

Comme autres exemples on peut citer les fonds marins constitués de rugosités aléatoires et les corps artificiels avec une distribution périodique des rugosités. Une simulation numérique des problèmes d'écoulements en présence d'une géométrie rugueuse est très difficile pour deux raisons. Un grand nombre de noeuds de maillage est nécessaire ainsi que de multiples données. D'un point de vue numérique, une frontière rugueuse artificielle proche de celle d'origine est choisie et les équations sont résolues dans le "nouveau" domaine. La difficulté de la frontière rugueuse est contournée mais des conditions aux limites viennent à manquer. Il est clair que la condition de non-pénétration $v.n = 0$ doit être conservée mais il n'y a en outre aucune raison de garder la condition d'adhérence.

Habituellement le cisaillement est supposé être une fonction non-linéaire F de la vitesse tangentielle. F est déterminée de façon empirique et varie suivant la nature du problème. De telles relations sont appelées *loi de paroi* et la condition classique de Navier en est un exemple. Un autre exemple est la modélisation de la couche limite turbulente à proximité de la surface rugueuse par un profil logarithmique des vitesses.

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right) + C^+(k_s^+) \right) \quad (1)$$

où v_τ est la vitesse tangentielle, y la coordonnée verticale et τ_w le cisaillement, ρ représente la densité et μ la viscosité, $\kappa \approx 0.41$ est la constante de von Kármán's et C^+ une fonction du rapport k_s^+ c.a.d de la hauteur des rugosités k_s sur l'épaisseur de la sous-couche mince de la paroi $\delta_v = \frac{\mu}{v_\tau}$. Pour plus de détail nous donnons la référence du livre de Schlichting.

Justifier le profil logarithmique des vitesses dans la couche superposée est mathématiquement hors d'atteinte pour le moment. Cependant à partir de résultats récents, nous sommes capables de justifier la loi de Navier pour des écoulements laminaires visqueux incompressibles au dessus de frontières à rugosité périodique. Dans cet exposé nous allons donner un aperçu de résultats récents rigoureux sur la condition de Navier.

Nous nous concentrons sur les équations de Stokes et de Navier-Stokes incompressibles et nous allons présenter une dérivation de la loi de Navier en construisant des couches limites développées par W. Jäger et A. Mikelić.

Couche limite de Navier

Comme il a été déjà observé en hydrodynamique, les phénomènes importants pour une frontière apparaissent dans une couche mince l'entourant. Nous ne nous intéressons pas aux couches limites, correspondantes à la limite de la zéro viscosité pour les équations de Navier-Stokes, mais plutôt à la couche limite visqueuse, décrivant des effets de la rugosité. Il y a une similitude avec les couches limites décrivant les effets interfaciaux entre un domaine rempli par un fluide et un milieu poreux saturé (la loi de Beavers et Joseph).

Le but de cette section est de présenter la construction de la couche limite principale, qui sera utilisée pour calculer la matrice de frottement, figurant comme coefficient dans la loi de glissement de Navier. Il est naturel de l'appeler *la couche limite de Navier*. Dans l'article

[JM1] W. Jäger, A. Mikelić , *On the roughness-induced effective boundary conditions for a viscous flow*, *J. of Differential Equations*, 170(2001), p. 96-122.

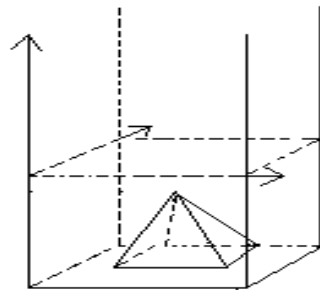
la 2D couche limite était construite. On poursuit ici la 3D construction entamée dans

[JM03] W. Jäger, A. Mikelić , *Couette Flows over a Rough Boundary and Drag Reduction* , *Communications in Mathematical Physics* , Vol. 232 (2003), p. 429-455.

qui généralise les résultats de [JMa01] .

Soient b_j , $j = 1, 2, 3$ des constantes positives. Soit $Z = (0, b_1) \times (0, b_2) \times (0, b_3)$ et soit Υ une

surface Lipschitzienne $y_3 = \Upsilon(y_1, y_2)$, prenant valeurs entre 0 et b_3 . Nous supposons que la surface rugueuse $\cup_{k \in \mathbb{Z}^2} (\Upsilon + k)$ est aussi Lipschitzienne. Nous introduisons la cellule canonique de rugosité par $Y = \{y \in Z \mid b_3 > y_3 > \max\{0, \Upsilon(y_1, y_2)\}\}$.



Le rôle crucial revient au problème auxiliaire suivant
 Pour un vecteur constant $\lambda \in \mathbb{R}^2$, trouver $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\}$ satisfaisant

$$-\Delta_y \xi^\lambda + \nabla_y \omega^\lambda = 0 \text{ dans } Z^+ \cup (Y - b_3 \vec{e}_3) \quad (2)$$

$$\operatorname{div}_y \xi^\lambda = 0 \text{ dans } Z_{bl} \quad (3)$$

$$[\xi^\lambda]_S(\cdot, 0) = 0 \text{ sur } S \quad (4)$$

$$[\{\nabla_y \xi^\lambda - \omega^\lambda I\} \vec{e}_3]_S(\cdot, 0) = \lambda \text{ sur } S \quad (5)$$

$$\xi^\lambda = 0 \quad \text{sur } (\Upsilon - b_3\vec{e}_3), \quad (6a)$$

$$\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\} \text{ est } y' = (y_1, y_2) - \text{périodique}, \quad (6b)$$

où $S = (0, b_1) \times (0, b_2) \times \{0\}$, $Z^+ = (0, b_1) \times (0, b_2) \times (0, +\infty)$, et $Z_{bl} = Z^+ \cup S \cup (Y - b_3\vec{e}_3)$.

Soit $V = \{z \in L^2_{loc}(Z_{bl})^3 : \nabla_y z \in L^2(Z_{bl})^9; z = 0 \text{ sur } (\Upsilon - b_3\vec{e}_3); \text{div}_y z = 0 \text{ dans } Z_{bl} \text{ et } z \text{ est } y' = (y_1, y_2)\text{-périodique}\}$. Le lemme de Lax-Milgram nous garantit l'existence d'un unique $\xi^\lambda \in V$ satisfaisant

$$\int_{Z_{bl}} \nabla \xi^\lambda \nabla \varphi \, dy = - \int_S \varphi \lambda \, dy_1 dy_2, \quad \forall \varphi \in V. \quad (7)$$

En utilisant le théorème de De Rham, nous obtenons une fonction $\omega^\lambda \in L^2_{loc}(Z_{bl})$, unique modulo une constante et satisfaisant (2). D'après la théorie elliptique les solutions $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\}$ de (2)-(6) sont telles que $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\} \in V \cap C^\infty(Z^+ \cup (Y - b_3\vec{e}_3))^3 \times C^\infty(Z^+ \cup (Y - b_3\vec{e}_3))$ to (2)-(6).

Alors on a

Lemme 1 Soient a, a_1 et a_2 , $a_1 > a_2$, des constantes positives. Alors la solution $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\}$ satisfait

$$\begin{cases} \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \xi_2^\lambda(y_1, y_2, a) dy_1 dy_2 = 0, \\ \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \omega^\lambda(y_1, y_2, a_1) dy_1 dy_2 = \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \omega^\lambda(y_1, y_2, a_2) dy_1 dy_2, \\ \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \xi_j^\lambda(y_1, y_2, a_1) dy_1 dy_2 = \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \xi_j^\lambda(y_1, y_2, a_2) dy_1 dy_2, j = 1, 2 \\ C_\lambda^{bl} = \sum_{j=1}^2 C_\lambda^{j,bl} \lambda_j = \int_S \xi^\lambda \lambda dy_1 dy_2 = - \int_{Z_{bl}} |\nabla \xi^\lambda(y)|^2 dy < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Lemme 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^2$ et soit $\{\xi^\lambda, \omega^\lambda\}$ la solution de (2) – (6) satisfaisant $\int_S \omega^\lambda dy_1 dy_2 = 0$. Alors

$$\xi^\lambda = \sum_{j=1}^2 \xi^j \lambda_j \text{ et } \omega^\lambda = \sum_{j=1}^2 \omega^j \lambda_j, \text{ où } \{\xi^j, \omega^j\} \in V \times L_{loc}^2(Z_{bl}), \int_S \omega^j dy_1 dy_2 = 0, \text{ est la solution de (2) – (6) pour } \lambda = \vec{e}_j, j = 1, 2.$$

Lemme 3. Soit $a > 0$ et soit $\xi^{a,\lambda}$ la solution de (2) – (6) avec S remplacé par $S_a = (0, b_1) \times (0, b_2) \times \{a\}$ et Z^+ by $Z_a^+ = (0, b_1) \times (0, b_2) \times (a, +\infty)$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} C_\lambda^{a,bl} &= \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \xi^{a,\lambda}(y_1, y_2, a) \lambda dy_1 \\ &= C_\lambda^{bl} - a |\lambda|^2 b_1 b_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Ce résultat simple va impliquer l'invariance de la loi obtenue par rapport à la position de la paroi artificielle.

Corollaire 4. $|C_\lambda^{a,bl}|$ est minimale pour $a = 0$.

Remarque. Si la frontière est plane, i.e. $\Upsilon = \text{cte.}$, alors la constante minimale $|C_\lambda^{a,bl}|$ est égale à zéro. Dans ce cas, la condition d'adhérence à la paroi va rester. Si b_3 est la hauteur maximale de Υ , alors le lemme 3 n'est pas valable pour $a < 0$.

Lemme 5. Soit $\{\xi^j, \omega^j\}$ vérifiant le lemme 2 et soit $M_{ij} = \frac{1}{b_1 b_2} \int_S \xi_i^j dy_1 dy_2$ la matrice de Navier. Alors la matrice M est symétrique définie négative.

Lemme 6 . Soit $\{\xi^j, \omega^j\}, j = 1$ et $j = 3$, vérifiant le Lemme 2. Alors on a

$$\left\{ \begin{array}{l} |D^\alpha \text{rot}_y \xi^j(y)| \leq C e^{-2\pi y_3 \min\{1/b_1, 1/b_2\}}, y_3 > 0, \alpha \in \mathbb{N}^2 \cup (0, 0) \\ |\xi^j(y) - (M_{1j}, M_{2j}, 0)| \leq C(\delta) e^{-\delta y_3}, y_3 > 0, \forall \delta < \frac{2\pi}{\max\{b_1, b_2\}} \\ |D^\alpha \xi^j(y)| \leq C(\delta) e^{-\delta y_3}, y_3 > 0, \alpha \in \mathbb{N}^2, \forall \delta < \frac{2\pi}{\max\{b_1, b_2\}} \\ |\omega^j(y)| \leq C e^{-2\pi y_3 \min\{1/b_1, 1/b_2\}}, y_3 > 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Corollaire 7 Le système (2) – (6) définit une couche limite.

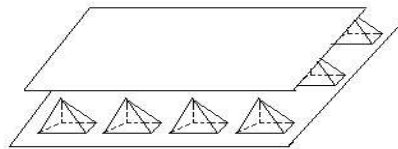
Justification de la condition de glissement de Navier pour l'écoulement de Couette laminaire 3D

Une justification mathématiquement rigoureuse de la condition de glissement de Navier pour l'écoulement de Poiseuille 2D tangentiel à une frontière rugueuse est dans [JM01] . Un écoulement correspondant aux nombres de Reynolds modérés a été considéré et les résultats suivants ont été montrés : a) Un résultat de stabilité non-linéaire par rapport aux petites perturbations de la frontière régulière par une frontière rugueuse; b) Un résultat d'approximation d'ordre $\varepsilon^{3/2}$; c) La justification rigoureuse de la condition de glissement de Navier.

Ici, nous allons présenter les résultats qui figurent dans l'article [JM03] et qui concernent un écoulement de Couette 3D.

Nous considérons un écoulement visqueux incompressible dans le domaine Ω^ε , contenant le parallélépipède $P = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$,

l'interface $\Sigma = (0, L_1) \times (0, L_2) \times \{0\}$ et la couche rugueuse $R^\varepsilon = \left(\cup_{\{k \in \mathbb{Z}^2\}} \varepsilon(Y + (k_1, k_2, -b_3)) \right) \cap \left((0, L_1) \times (0, L_2) \times (-\varepsilon b_3, 0) \right)$. La cellule canonique $Y \subset (0, b_1) \times (0, b_2) \times (0, b_3)$ est définie dans la section précédente. Pour simplifier, nous supposons que $L_1/(\varepsilon b_1)$ et $L_2/(\varepsilon b_2)$ sont des entiers. Soit $\mathcal{I} = \{0 \leq k_1 \leq L_1/b_1; 0 \leq k_2 \leq L_2/b_2; k \in \mathbb{Z}^2\}$. Alors, notre frontière rugueuse $\mathcal{B}^\varepsilon = \cup_{\{k \in \mathcal{I}\}} \varepsilon(\Upsilon + (k_1, k_2, -b_3))$ contient un grand nombre de "bosses", distribuées périodiquement de longueur et d'amplitude caractéristique $\varepsilon \ll 1$.



Pour un $\varepsilon > 0$ et une vitesse $\vec{U} = (U_1, U_2, 0)$, donnés, l'écoulement de Couette est décrit par le système suivant

$$-\nu \Delta v^\varepsilon + (v^\varepsilon \nabla) v^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad (11)$$

$$\operatorname{div} v^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad (12)$$

$$v^\varepsilon = 0 \text{ sur } \mathcal{B}^\varepsilon, \quad (13)$$

$$v^\varepsilon = \vec{U} \text{ sur } \Sigma_2 \quad (14)$$

$$\{v^\varepsilon, p^\varepsilon\} \text{ est périodique en } (x_1, x_2) \\ \text{de période } (L_1, L_2) \quad (15)$$

où $\nu > 0$ est la viscosité cinématique, $\Sigma_2 = (0, L_1) \times (0, L_2) \times \{L_3\}$ et $\int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon dx = 0$.

Comme nous avons besoin, non seulement de l'existence pour ε donné, mais aussi des estimations a priori indépendantes de ε , nous présentons un résultat de stabilité non-linéaire par rapport aux perturbations rugueuses de la frontière. Il va impliquer les estimations a priori uniformes.

Notons que l'écoulement de Couette dans P , satisfaisant les conditions d'adhérence à Σ , est donné par

$$v^0 = \frac{U_1 x_3}{L_3} \vec{e}_1 + \frac{U_2 x_3}{L_3} \vec{e}_2 = \vec{U} \frac{x_3}{L_3}, \quad p^0 = 0. \quad (16)$$

Soit $|U| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$. On montre aisément l'unicité si $|U|L_3 < 2\nu$ i.e. si le nombre de Reynolds est modéré.

Nous prolongeons la vitesse sur $\Omega^\varepsilon \setminus P$ par zéro.

On cherche une solution pour (11) – (15) comme une petite perturbation de l'écoulement de Couette (16).

Théorème 8 . Soit $|U|L_3 \leq \nu$. Alors il existe des constantes $C_0 = C_0(b_1, b_2, b_3, L_1, L_2)$ telles que pour $\varepsilon \leq C_0 \left(\frac{L_3}{|U|}\right)^{3/4} \nu^{3/4}$ le problème (11)–(15) admette une solution unique $\{v^\varepsilon, p^\varepsilon\} \in H^2(\Omega^\varepsilon)^3 \times H^1(\Omega^\varepsilon)$, $\int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon dx = 0$, satisfaisant

$$\|\nabla(v^\varepsilon - v^0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^9} \leq C\sqrt{\varepsilon}\frac{|U|}{L_3}. \quad (19)$$

De plus,

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon \setminus P)^3} \leq C\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\frac{|U|}{L_3} \quad (20)$$

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)^3} + \|v^\varepsilon - v^0\|_{L^2(P)^3} \leq C\varepsilon\frac{|U|}{L_3} \quad (21)$$

$$\|p^\varepsilon - p^0\|_{L^2(P)} \leq C\frac{|U|}{L_3}\sqrt{\varepsilon}, \quad (22)$$

où $C = C(b_1, b_2, b_3, L_1, L_2)$.

Maintenant nous avons les estimations à priori uniformes par rapport à ε . Malheureusement l'approximation obtenue n'est pas suffisamment bonne. Il nous faut ajouter la correction d'ordre $O(\varepsilon)$.

La condition de glissement de Navier correspond à la correction de la vitesse d'ordre $O(\varepsilon)$ sur la frontière. Le calcul non-rigoureux donne

$$v^\varepsilon = v^0 - \frac{\varepsilon}{L_3} \sum_{j=1}^2 U_j \left(\xi_j^j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - (M_{j1}, M_{j2}, 0) H(x_3) \right) - \frac{\varepsilon}{L_3} \sum_{j=1}^2 U_j \left(1 - \frac{x_3}{L_3} \right) (M_{j1}, M_{j2}, 0) H(x_3) + O(\varepsilon^2)$$

où v^0 est la vitesse de Couette dans P et le dernier terme correspond au contre-écoulement créé par la stabilisation de la vitesse, qui correspond à la couche limite, vers une vitesse constante non nulle. En conséquence sur l'interface Σ

$$\frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_3} = \frac{U_j}{L_3} - \frac{1}{L_3} \sum_{i=1}^2 U_i \frac{\partial \xi_j^i}{\partial y_3} + O(\varepsilon) \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} v_j^\varepsilon = -\frac{1}{L_3} \sum_{i=1}^2 U_i \xi_j^i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon).$$

Après la prise de la moyenne nous trouvons la loi de glissement de Navier

$$u_j^{eff} = -\varepsilon \sum_{i=1}^2 M_{ji} \frac{\partial u_i^{eff}}{\partial x_3} \text{ sur } \Sigma, \quad (NFC)$$

où u^{eff} est la moyenne de v^ε sur une rugosité représentative et la matrice M est définie dans le lemme 4. On néglige les termes d'ordre plus élevé.

Nous allons maintenant donner une démonstration rigoureuse.

Il est clair que dans P l'écoulement va continuer d'être régi par le système de Navier-Stokes. La présence des irrégularités va contribuer seulement aux conditions efficaces sur la paroi artificielle. La contribution dominante pour l'estimation (19) vient de l'intégrale superficielle $\int_\Sigma \varphi_j$. On l'élimine en utilisant les couches limites pour $j = 1, 2$

$$\xi^{j,\varepsilon}(x) = \varepsilon \xi^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ et } \omega^{j,\varepsilon}(x) = \omega^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \quad (23)$$

où $\{\xi^j, \omega^j\}$ est définie dans le lemme 2. Nous avons, pour tout $q \geq 1$ et $j = 1, 2$,

$$\frac{1}{\varepsilon} \|\xi^{j,\varepsilon} - \varepsilon(M_{1j}, M_{2j}, 0)\|_{L^q(P)^3} + \|\omega^{j,\varepsilon}\|_{L^q(P)} + \|\nabla \xi^{j,\varepsilon}\|_{L^q(\Omega)^9} = C\varepsilon^{1/q} \quad (24)$$

et

$$-\Delta \xi^{j,\varepsilon} + \nabla \omega^{j,\varepsilon} = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon \setminus \Sigma \quad (25)$$

$$\operatorname{div} \xi^{j,\varepsilon} = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon \quad (26)$$

$$[\xi^{j,\varepsilon}]_\Sigma(\cdot, 0) = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (27)$$

$$[\{\nabla \xi^{j,\varepsilon} - \omega^{j,\varepsilon} I\}e_3]_\Sigma(\cdot, 0) = e_j \text{ sur } \Sigma, \quad (28)$$

i.e. notre couche limite correspond à la création de petits tourbillons par des rugosités.

La stabilisation de $\xi^{j,\varepsilon}$ vers une vitesse constante non-nulle $\varepsilon(M_{1j}, M_{2j}, 0)$, sur la frontière supérieure, crée un contre-écoulement. Il est donné par $d^i = (1 - \frac{x_3}{L_3})\vec{e}_i$ et $g^i = 0$.

On veut montrer maintenant que les quantités suivantes sont en $o(\varepsilon)$ pour la vitesse et en $O(\varepsilon)$ pour la pression:

$$\mathcal{U}^\varepsilon(x) = v^\varepsilon - \frac{1}{L_3} \left(x_3^+ \vec{U} - \varepsilon \sum_{j=1}^2 U_j \xi^j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \frac{x_3^+}{L_3} M \vec{U} \right) \quad (29)$$

$$\mathcal{P}^\varepsilon = p^\varepsilon + \frac{\nu}{L_3} \sum_{j=1}^2 U_j \omega^{j,\varepsilon}. \quad (30)$$

On a le résultat suivant

Théorème 9 ([JM03]). Soit \mathcal{U}^ε donnée par (29) et \mathcal{P}^ε par (30). Alors $\mathcal{U}^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, $\mathcal{U}^\varepsilon = 0$ sur Σ , elle est périodique en (x_1, x_2) , exponentiellement petite sur Σ_2 et $\operatorname{div} \mathcal{U}^\varepsilon = 0$ dans Ω^ε . De plus, $\forall \varphi$ satisfaisant les mêmes conditions aux limites, nous avons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \left| \nu \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla \mathcal{U}^\varepsilon \nabla \varphi - \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{P}^\varepsilon \operatorname{div} \varphi + \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{x_3^+}{L_3} \sum_{j=1}^2 U_j \frac{\partial \mathcal{U}^\varepsilon}{\partial x_j} \varphi + \right. \\ & \left. \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{U}_3^\varepsilon \frac{\vec{U}}{L_3} \varphi + \left| \int_{\Omega^\varepsilon} ((v^\varepsilon - v^0) \nabla) (v^\varepsilon - v^0) \varphi \right| \right. \\ & \quad \left. \leq C \varepsilon^{3/2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^9} \frac{|U|^2}{L_3}. \right. \quad (31) \end{aligned}$$

Corollaire 10 ([JM03]). Soit $\mathcal{U}^\varepsilon(x)$ et \mathcal{P}^ε définie par (29) – (30) et soit

$$\varepsilon \leq \frac{\nu^{6/7}}{|U|} \min \left\{ \frac{\nu^{1/7}}{4(|M| + \|\xi\|_{L^\infty})}, CL_3^{3/7} |U|^{1/7} \right\}. \quad (32)$$

Alors v^ε , construite dans le théorème 8, est une solution unique pour (11) – (15) et

$$\|\nabla \mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^9} + \|\mathcal{P}^\varepsilon\|_{L^2(P)} \leq C\varepsilon^{3/2} \frac{|U|^2}{\nu L_3} \quad (33)$$

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(P)^3} + \|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)^3} \leq C\varepsilon^2 \frac{|U|^2}{\nu L_3} \quad (34)$$

Les estimations (33) – (34) permettent de justifier la condition de glissement de Navier.

Maintenant nous introduisons l'écoulement de Couette-Navier efficace par : Trouver la vitesse u^{eff} et la pression p^{eff} telles que

$$-\nu \Delta u^{eff} + (u^{eff} \nabla) u^{eff} + \nabla p^{eff} = 0 \text{ dans } P, \quad (35)$$

$$\operatorname{div} u^{eff} = 0 \text{ dans } P, \quad (36a)$$

$$u^{eff} = (U_1, U_2, 0) \text{ sur } \Sigma_2, \quad (36b)$$

$$u_3^{eff} = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (36c)$$

$$u_j^{eff} = -\varepsilon \sum_{i=1}^2 M_{ji} \frac{\partial u_i^{eff}}{\partial x_3}, \quad j = 1, 2 \text{ sur } \Sigma \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \{u^{eff}, p^{eff}\} &\text{ est périodique en } (x_1, x_2) \\ &\text{ de période } (L_1, L_2) \end{aligned} \quad (38)$$

Soit $|U|L_3 \leq \nu$, alors le problème (35) – (38) admet une solution unique

$$\begin{cases} u^{eff} = (\tilde{u}^{eff}, 0), \\ \tilde{u}^{eff} = \vec{U} + \left(\frac{x_3}{L_3} - 1\right) \left(I - \frac{\varepsilon}{L_3} M\right)^{-1} \vec{U} \\ p^{eff} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

pour $x \in P$. Nous estimons l'erreur faite en remplaçant $\{v^\varepsilon, p^\varepsilon, \mathcal{M}^\varepsilon\}$ par $\{u^{eff}, p^{eff}, \mathcal{M}^{eff}\}$.

Théorème 11 ([JM03]). Sous les hypothèses du théorème 8 nous avons

$$\|\nabla(v^\varepsilon - u^{eff})\|_{L^1(P)^9} \leq C\varepsilon, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} \|v^\varepsilon - u^{eff}\|_{L^2(P)^3} + \|v^\varepsilon - u^{eff}\|_{L^1(P)^3} \\ \leq C\varepsilon^2 \frac{|U|}{L_3}, \end{aligned} \quad (41)$$

L'étape suivante est de calculer la *traînée* pour $j = 1, 2$

$$\mathcal{F}_{t,j}^\varepsilon = \frac{1}{L_1 L_2} \int_{\Sigma} \nu \frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2. \quad (42)$$

Théorème 12 ([JM03]). Soit la traînée $\mathcal{F}_t^\varepsilon$ définie par (42). Alors on a

$$|\mathcal{F}_t^\varepsilon - \nu \frac{1}{L_3} (\vec{U} + \frac{\varepsilon}{L_3} M \vec{U})| \leq C \varepsilon^2 \frac{|U|^2}{\nu L_3} (1 + \frac{\nu}{L_3 |U|}) \quad (43)$$

Remarque On en déduit que la présence des rugosités périodiques peut diminuer la traînée. La contribution est linéaire en ε , et en conséquence assez petite. D'après Amirat et Simon 1997 pour un écoulement laminaire, la réduction de la traînée causée par la rugosité est négligeable. Néanmoins, pour un écoulement turbulent la présence des rugosités réduit la traînée d'une manière significative. Le phénomène a été observé sur les Avians et les Nektons (la peau de requin) et utilisé pour les bateaux et les avions (e.g. pour le yacht " Stars and Strips " dans la finale de l'America's Cup).

Une référence classique est l'article de Bushnell, Moore , Ann. Rev. Fluid Mech. 1991. Pour une explication mathématique on peut consulter l'article [JM03] .

Remarque Comme dans [JMa01] nous montrons qu'une perturbation de position de la paroi artificielle d'ordre $O(\varepsilon)$ implique une perturbation de la solution de $O(\varepsilon^2)$. Ce résultat est une conséquence du Lemme 3. En effet la matrice M change, mais sa perturbation est compensée par le changement de position de Σ . Ainsi, nous sommes libres de fixer la position de Σ . L'influence sur le résultat est seulement d'un ordre plus élevé dans le développement asymptotique.

Conclusion et applications possibles

Parmi les applications on trouvera des écoulements turbulents en présence des frontières rugueuses. On peut se poser la question de l'utilité des estimations laminares obtenues. L'application est basée

sur la théorie de la couche limite turbulente présentée dans le livre

[SCHGE00] H. Schlichting, K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, 8th Revised and Enlarged Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

On sait que l'écoulement de Couette turbulent a une structure bi-couche : une couche turbulente où la viscosité moléculaire est négligeable comparée aux effets turbulents et une sous-couche visqueuse où on est obligé de tenir compte simultanément des effets turbulents et visqueux. L'écoulement dans cette sous-couche est régi par le cisaillement turbulent τ_w , qui dépend seulement du temps t . τ_w définit la vitesse de frottement $v = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$, où ρ est la densité. Alors l'épaisseur de la couche est $\delta_v = \frac{\nu}{v}$ et la théorie de l'écoulement de Couette turbulent (voir e.g. [SCHGE00]) donne

$$u^+ = f(y^+), \quad y^+ = \frac{x_3}{\delta_v} \quad \text{et} \quad u^+ = \frac{\bar{u}}{v}$$

où \bar{u} est la vitesse moyenne, comme la loi universelle pour la distribution de la vitesse dans la couche

visqueuse. y^+ est la coordonnée caractéristique de la paroi et $u^+ = \frac{\bar{u}}{v}$ est la vitesse renormalisée. Cette loi est valable pour $0 \leq y^+ < 5$, pour $5 < y^+ < 70$ on a la zone tampon et pour $y^+ > 70$ la couche de chevauchement, où on a un profil logarithmique de la vitesse $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C^+$. Pour plus de détails voir [SCHGE00]. Pour une paroi lisse $C^+ = 5$. Cette théorie s'applique aussi aux parois rugueuses et on les traite en ajustant la constante C^+ . C^+ dépend du rapport $k_s^+ = \frac{k_s}{\delta_v}$, où k_s est la hauteur des rugosités. Alors $\lim_{k_s^+ \rightarrow 0} C^+(k_s^+) = 5$ (paroi lisse) et $\lim_{k_s^+ \rightarrow +\infty} (C^+(k_s^+) + \frac{1}{\kappa} \ln k_s^+) = 8$ (paroi très rugueuse).

L'analyse mathématique de l'écoulement dans la zone tampon et dans la couche de chevauchement est hors de portée pour le moment. Néanmoins, si nous supposons que les petites rugosités restent en permanence dans la sous-couche visqueuse nous pouvons appliquer notre théorie.

Les équations correspondantes sont (11) – (15) avec $L_3 = \delta_v$ et la vitesse de la paroi supérieure $v = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = (v_1, v_2, 0)$ en $x_3 = \delta_v$.

Comme $\delta_\nu \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \nu < 2\nu$, nos résultats peuvent être appliqués et on obtient la loi de glissement de Navier si

$$\varepsilon \leq \frac{\nu^{6/7}}{|U|} \min \left\{ \frac{\nu^{1/7}}{4(|M| + \|\xi\|_{L^\infty})}, CL_3^{3/7} |U|^{1/7} \right\}. \quad (32)$$

Cette théorie est applicable aux Nektons (voir [JM03]).

Si cette condition est violée mais avec $\varepsilon < \sqrt{\nu}$ alors on a des variantes non-linéaires de la loi de glissement de Navier. Cette variante non-linéaire est en effet non-locale elle aussi et on a

$$u_j^{eff} = -\varepsilon \sum_{i=1}^2 M_{ji} \left(\zeta(y_1, 0, \frac{\partial u_k^{eff}}{\partial x_2}) \right) \frac{\partial u_i^{eff}}{\partial x_3} \text{ sur } \Sigma, \quad (NFCN)$$

En général M_{ji} est une fonction bornée du gradient de u^{eff} , étant lui-même une fonction non-locale de ζ . ζ satisfait des équations de la couche limite pour un système de Navier-Stokes non-stationnaire.

En plus des effets non-linéaires, les frontières rugueuses sont où fractales où aléatoires. On peut envisager le travail dans cette direction.

Pour conclure, nous pensons qu'il est tout à fait possible de développer une théorie des lois de parois, fondée sur des résultats mathématiques rigoureux.

