

SIMULATION DE PROCESSUS DE DIFFUSION DANS UN MILIEU DISCONTINU : RÉSULTATS ET PERSPECTIVES

JEAN-FRANÇOIS DELMAS, ANTOINE LEJAY, ET MIGUEL MARTINEZ

1. INTRODUCTION

Le but initial de ce projet est de développer des méthodes de Monte Carlo utilisant la simulation de processus stochastiques dont le générateur infinitesimal est de la forme $L = \text{div}(a\nabla \cdot)$, lorsque a est une fonction à valeur matricielle qui n'est pas forcément continue. Cela veut dire qu'à l'instant t , la densité $p(t, x, y)$ de la position du processus initialement en x est solution de $\partial_t p(t, x, y) = L_x p(t, x, y)$.

Dans le cas où a est régulier, alors nous pouvons nous ramener au cas du calcul stochastique « classique », et le processus est solution d'une équation différentielle stochastique (EDS). Il existe alors de nombreuses possibilités afin de simuler de tels processus (voir par exemple [KP92]).

Dès que a est discontinu, ou si a n'est pas régulier, ce n'est plus possible, et il faut alors tenir compte des discontinuités. Il n'existe pour l'instant pas de méthodes générales.

Nous nous sommes pour l'instant intéressés au cas de la dimension une, et nous nous sommes intéressés à des algorithmes spécifiques pour le traitement du déplacement du fluide dans des fissures.

2. QUE SE PASSE-T-IL AUX DISCONTINUITÉS ?

Intéressons nous dans un premier temps au cas d'un processus de diffusion en dimension un engendré par l'opérateur $L = \text{div}(a\nabla \cdot)$, où $a(x) = a_+$ sur \mathbb{R}_+ et $a(x) = a_-$ sur \mathbb{R}_- . Soit $\phi(x)$ la fonction linéaire par morceaux donnée par $\phi(x) = x/\sqrt{a_+}$ sur \mathbb{R}_+ et $\phi(x) = x/\sqrt{a_-}$ sur \mathbb{R}_- . Alors $Y_t = \phi(X_t)$ est aussi un processus de diffusion appelé *mouvement brownien biaisé*. Ce processus, qui est défini par un paramètre $\gamma \in (-1, 1)$ ici égal à $\sqrt{a_+}/(\sqrt{a_+} + \sqrt{a_-})$ a les propriétés suivantes : il se comporte comme un mouvement brownien en dehors de 0. Mais lorsqu'il touche 0 en un temps τ , la probabilité qu'il soit positif à un instant $\tau + \varepsilon$ donné avec $\varepsilon > 0$ est γ (contre $1/2$ pour le mouvement brownien).

Intuitivement, cela revient à dire qu'en zéro, la particule va du côté positif avec probabilité γ et du côté négatif avec probabilité $1 - \gamma$. Mais à cause de l'irrégularité des trajectoires (la particule passera d'un côté et de l'autre de 0 infiniment souvent après chaque zéro pendant un temps très court), cette description n'est qu'heuristique. Cependant, il existe de nombreuses autres manières de décrire le comportement en zéro du mouvement brownien biaisé de façon exacte.

Ainsi, l'utilisation du mouvement brownien biaisé permet de comprendre les discontinuités comme des « barrières perméables », et nous pensons que cela peut être utile pour développer de nouvelles méthodes de Monte Carlo.

3. SIMULATION DE PROCESSUS DE DIFFUSION À COEFFICIENT DISCONTINU

Dans sa thèse [Mar03], Miguel Martinez étudie la vitesse de convergence du schéma d'Euler pour simuler une équation différentielle stochastique (E.D.S.) à coefficients discontinus (le schéma d'Euler pour les E.D.S. est une adaptation du schéma d'Euler pour les équations différentielles ordinaires au cas stochastique). À l'aide de transformations

simples, cela permet de considérer la simulation de processus de diffusion associés à un opérateur sous forme divergence. Nous nous intéressons aussi à une autre méthode utilisant le mouvement brownien biaisé [LM03].

4. DÉPLACEMENT DU FLUIDE DANS LES FISSURES

4.1. Un algorithme. Dans un premier temps, nous avons supposé que le réseau de fissures traverse un milieu imperméable. Dans [FW93], il est montré qu'il est possible d'approcher le mouvement des particules de fluide (dans un autre contexte) par les trajectoires d'un processus sur un graphe, qui représente le « squelette » du réseau de fissures.

Dans [Lej03], nous proposons un algorithme afin de simuler le déplacement d'une particule dans un réseau de fissures en utilisant une telle approximation. Cet algorithme est une sorte de marche aléatoire mais où le temps évolue de façon exacte (il ne s'agit donc pas d'une approximation par discrétisation, et cet algorithme ne nécessite aucun maillage).

4.2. Perspectives à court terme. L'algorithme précédent peut être amélioré dans deux directions. D'une part, il faut prendre en compte la présence d'un terme de convection : ce travail est en cours de réalisation par Pierre Étoré, qui vient de débiter sa thèse à l'Institut Élie Cartan. D'autre part, il faut prendre en compte les échanges entre la roche poreuse et les fissures. Ce travail devrait permettre de coupler deux méthodes afin de simuler le mouvement des particules dans un milieu poreux fissuré, l'une pour les fissures et l'autre pour la roche poreuse. De plus, nous nous intéressons aussi à « l'effet de ralentissement » induit par une fissure très fine mais dont le coefficient de perméabilité est très élevé.

5. PERSPECTIVES À LONG TERME

Il s'agit bien entendu de comprendre l'effet des discontinuités du coefficient de diffusion sur le comportement de processus stochastiques, et comment simuler ces derniers.

RÉFÉRENCES

- [FW93] M.I. FREIDLIN and A.D. WENTZELL. Diffusion processes on graphs and the averaging principle. *Ann. Probab.*, vol. 21, n°4, pp. 2215–2245, 1993.
- [KP92] P. E. KLOEDEN and E. PLATEN. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Lej03] A. LEJAY. Simulating a diffusion on a graph. Application to reservoir engineering. *Monte Carlo Methods Appl.*, vol. 9, n°3, pp. 241–256, 2003.
- [LM03] A. LEJAY et M. MARTINEZ. A scheme for simulating one-dimensional diffusions with discontinuous coefficients. En préparation, 2003.
- [Mar03] M. MARTINEZ. Thèse, INRIA Sophia-Antipolis, 2003.

J.-F. DELMAS : CERMICS, ÉCOLE DES PONTS
E-mail address: delmas@cermics.enpc.fr

A. LEJAY : PROJET OMEGA, INRIA LORRAINE/INSTITUT ÉLIE CARTAN
E-mail address: Antoine.Lejay@iecn.u-nancy.fr

M. MARTINEZ : PROJET OMEGA, INRIA SOPHIA-ANTIPOLIS
E-mail address: Miguel.Martinez@sophia.inria.fr