

Analyse de sensibilité et estimation de paramètres de transport pour une équation de diffusion, approche par état adjoint

François Clément*

Nina Khvoenkova†

Alain Cartalade‡

Philippe Montarnal§

Ce travail concerne la modélisation inverse d’une expérience (réalisée à l’échelle métrique) de diffusion inerte d’un traceur. Pour simplifier le problème, on étudie le système en coordonnées cylindriques en 1D-transitoire. L’évolution du traceur est décrite par une équation aux dérivées partielles de type diffusion :

$$(1) \quad \omega(r) \frac{\partial C}{\partial t}(r, t) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D(r) \frac{\partial C}{\partial r}(r, t) \right) + \lambda \omega(r) C(r, t) = 0 \quad r \in [r_1, r_2], t \in [0, t_f].$$

Les conditions aux limites sont :

$$(2) \quad \begin{cases} C(r_1, t) = C(r_1, t_0) + \alpha D(r_1) \int_{t_0}^t \frac{\partial C}{\partial r}(r_1, s) ds \\ D(r_2) \frac{\partial C}{\partial r}(r_2, t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, t_f]$$

et la condition initiale nulle :

$$(3) \quad C(r, 0) = 0 \quad r \in]r_1, r_2].$$

Dans ces relations, $\omega(r)$ est la porosité et $D(r)$ est la diffusion du système, λ est le coefficient de décroissance radioactive et $C(r, t)$ la concentration. La spécificité du problème physique vient de la dépendance en temps et en diffusion d’une des deux conditions aux limites prise à l’intérieur du puits d’injection ([1]).

Après discrétisation (par différences finies et schéma implicite en temps), le problème direct est représenté par la fonction :

$$(4) \quad \varphi : p \longmapsto (C^N, C_0)$$

où $p = (\omega, D)$ représente les paramètres à estimer, C^N les mesures au temps final le long de l’échantillon et C_0 les mesures au cours du temps dans la chambre d’injection (monitoring).

Pour des mesures données $d = (\hat{C}^N, \hat{C}_0)$, le problème inverse consiste alors à trouver les “meilleurs paramètres” qui minimisent la fonctionnelle :

$$(5) \quad J(p) = \frac{1}{2} \|\varphi(p) - d\|^2.$$

*INRIA-Rocquencourt, Domaine de Voluceau, B.P. 105, F-78153 Le Chesnay Cedex. Francois.Clement@inria.fr.

†INRIA-Rocquencourt et École Polytechnique/Université de Paris 6. Nina.Khvoenkova@inria.fr.

‡CEA, DM2S/SFME/MTMS, Bât. 454, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex. alain.cartalade@cea.fr.

§CEA, DM2S/SFME/MTMS. philippe.montarnal@cea.fr.

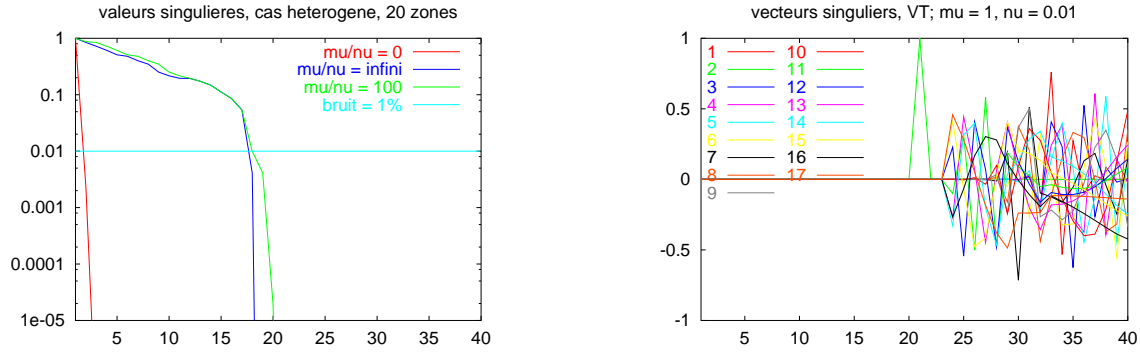


FIG. 1 – À gauche : valeurs singulières relatives correspondant aux mesures pondérées ($\mu C^N, \nu C_0$) pour différentes valeurs du rapport μ/ν . À droite : vecteurs singuliers dans l’espace des paramètres correspondant aux valeurs singulières situées “au-dessus” du niveau de bruit de 1% (pour $\mu/\nu = 100$).

La décomposition en valeurs singulières (SVD) est une généralisation de la diagonalisation aux matrices rectangulaires. Elle permet d’écrire la matrice Jacobienne du modèle direct sous la forme :

$$(6) \quad \varphi'(p_0) = USV^T$$

où U et V sont les matrices carrées unitaires des vecteurs singuliers et S la matrice diagonale des valeurs singulières (nombres positifs classés par ordre décroissant) de même dimension que la matrice des dérivées. La technique de l’état adjoint permet l’assemblage de la matrice Jacobienne ligne par ligne en modifiant le second membre des relations adjointes établies pour le calcul du gradient de la fonction coût J .

La rapidité de décroissance des valeurs singulières donne ensuite un indicateur sur le nombre (et la nature) des paramètres identifiables de façon stable, pour un niveau de bruit donné sur les observations, et les vecteurs singuliers associés renseignent sur les directions principales du système ([2]). Par exemple, dans la Figure 1, les mesures pondérées avec $\frac{\mu}{\nu} = 100$ mènent à une SVD comportant 17 valeurs singulières dans un rapport 100 (ie, 1% de bruit) et les vecteurs singuliers associés dans l’espace des paramètres correspondent visiblement tous au coefficient de diffusion (composantes 21 à 40).

Références

- [1] Cartalade, A., Montarnal, P., Cavanna, B., Blum, J., *Estimation des paramètres de transport d’un milieu poreux, approche par état adjoint*, Rapport DM2S SFME/MTMS/RT/03-002, CEA, Saclay, 2003.
- [2] Clément, F., Chavent, G., *Détermination des profils de température pendant la détonation d’un explosif liquide, le nitrométhane*, Rapport de Recherche n°4641, Inria, Rocquencourt, 2002.