

# Modélisation par asymptotique d'un site de stockage en milieu souterrain, éventuellement endommagé, après rupture des conteneurs

A. Bourgeat <sup>1</sup>, I. Boursier <sup>1</sup>, E. Marusic-Paloka <sup>2</sup>, D. Tromeur-Dervout <sup>1</sup>

## 1 Asymptotique pour le passage des modules au site tout entier

Initialement, le but de ce travail a été de donner une réponse au type de problème de changement d'échelle posé dans l'exercice COUPLEX [5], proposé par l'ANDRA; le but étant d'obtenir des modèles globaux mais suffisamment précis de la zone de stockage pour des simulation en champ lointain utilisés en calculs de sûreté. Pour cela, dans un premier temps, nous avons dérivé un modèle mathématique décrivant le comportement global d'un site de stockage de déchets radioactifs partir du comportement donné des modules. Les résultats thoriques ont été présentés à SIAM Conference on Mathematical and Computational Issues in the Geosciences (GS03), Austin, TX, 17-20 mars 2003 et partiellement publiés dans [1] et [2]. Ensuite, nous nous sommes intéressés à obtenir théoriquement le comportement global d'un module à partir de la description du comportement des galeries et des alvéoles de stockage; ceci, dans les cas sans endommagement et avec endommagement de la couche hôte au voisinage des galeries. Pour le cas du passage modules-site, une analyse asymptotique permet d'obtenir le comportement du modèle global (ou d'ordre 0) du site,  $c^0(x, t)$ , correspondant aux grands temps en supposant que l'on connaisse la production d'un module, et que le nombre de modules soit assez important. L'asymptotique tient compte du fait que la couche hôte est fine, par rapport aux dimensions de la zone de stockage entière, (d'ordre  $\epsilon$  où  $\epsilon$  est le rapport entre la largeur d'un module et la largeur de la zone de stockage complète); cf. figure 1. Si l'on veut considérer les oscillations aux temps courts, il faut alors effectuer un développement asymptotique d'ordre 1, avec couches limites, de la forme  $c(x, t) = c_\epsilon^0(x, t) + \epsilon(\Phi(t)M(\frac{x}{\epsilon})) + c^1(x, t, \frac{x}{\epsilon})$  où  $\Phi$  est le flux associé à une source,  $M(\frac{x}{\epsilon})$  est une fonction auxiliaire périodique stationnaire qui prend en compte la variation spatiale du flux autour d'une source prise individuellement, et  $c^1(x, t, \frac{x}{\epsilon})$  est une combinaison linéaire de  $c^0$ ,  $\nabla c^0$  et de fonctions auxiliaires ne dépendant que de  $\frac{x}{\epsilon}$  qui tiennent compte de la répartition spatiale périodique de l'ensemble des sources. On voit donc que pour les temps courts, où  $\Phi(t) \gg 1$ , la solution du problème complet  $c(x, t)$ , décrivant le comportement du site tout entier, peut être décomposé en la combinaison de la solution d'un problème global instationnaire  $c^0(x, t)$ , prenant en compte les conditions aux bords du domaine, et des solutions de problèmes auxiliaires périodiques stationnaires associés à une seule cellule.

<sup>1</sup> Université Lyon1, MCS, bât. ISTIL, 43 bd. du 11 novembre 69622 Villeurbanne

<sup>2</sup> Département de Mathématiques, Université de Zagreb Bijenička 30

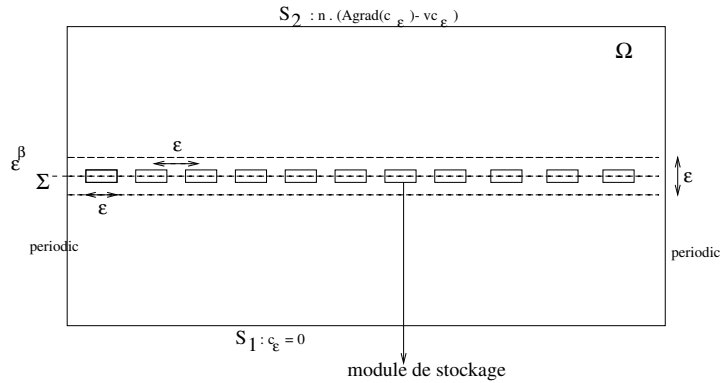


Figure 1: Schéma de la zone de stockage renormalisée

## 2 Simulation numérique des problèmes auxiliaires périodiques stationnaires pour l'asymptotique d'ordre 1

Les problèmes posés par la résolution numérique, par des techniques de calculs hautes performances, des problèmes diffusifs stationnaires apparaissant à l'ordre 1 du développement asymptotique du comportement global du site ont été présentés dans [3]. La prise en compte du caractère périodique des problèmes associés à l'ordre 1, ainsi que la régularité a priori des solutions de tels problèmes elliptiques, nous suggèrent d'utiliser les méthodes spectrales. Cependant, dans la mesure où l'hypothèse de périodicité n'est pas vérifiée partout dans la cellule entourant la source, nous utilisons une technique de décomposition de domaine en maillages non conformes. La précision spectrale a l'avantage de fournir des projections précises à l'interface et permet donc l'accélération de la convergence de l'algorithme de Schwarz par le procédé d'Aitken. La figure 2 représente la décomposition de domaine utilisée.

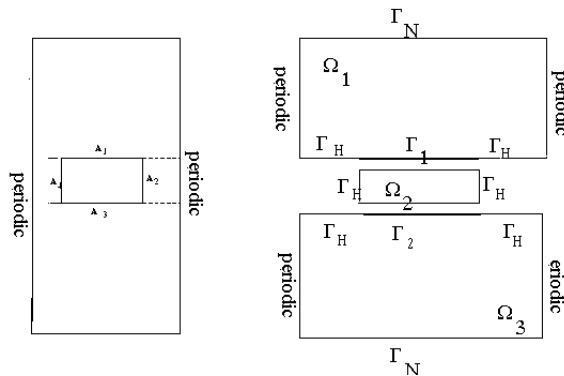


Figure 2: Décomposition de domaine utilisée pour la résolution des problèmes auxiliaires

### 2.0.1 Problèmes numériques spécifiques

La condition limite à l'interface artificielle présente des singularités alors que les méthodes spectrales nécessitent des fonctions régulières; ceci est dû à la géométrie du domaine dans chaque cellule qui occasionne des pertes de régularité du second membre et des solutions aux extrémités de l'interface de raccord des domaines. Cela introduit un phénomène de Gibbs qui rend la convergence de Schwarz non linéaire, alors qu'habituellement la linéarité de la convergence est classiquement supposée pour appliquer le procédé d'Aitken. Nous conjuguons donc deux techniques pour rendre le second membre aux interfaces, noté  $q$ , ainsi que la solution à l'interface plus réguliers:

- utilisation d'une interpolation d'Hermite d'ordre 5 de  $q$ ;
- application d'un filtre d'ordre 2 aux modes de Fourier de  $q$ .

Il faut aussi étendre la solution sur l'interface artificielle à une fonction périodique pour pouvoir obtenir une décomposition en modes; cette extension devant être régulière pour limiter le phénomène de Gibbs et maintenir une convergence de Schwarz dans l'espace des modes linéaire. A nouveau, nous utilisons une extension de la solution par un polynôme d'Hermite d'ordre 5, coïncidant à l'extrémité avec la solution et ses deux premières dérivées et valant 0 ainsi que ses deux premières dérivées à l'extrémité de l'extension.

### 2.0.2 Accélération par le procédé d'Aitken

Cette technique demande une évaluation précise des valeurs de la solution et de ses dérivées aux interfaces artificielles. Les méthodes spectrales assurent la précision suffisante aux projections que nous devons effectuer. Les procédés décrits en 2.0.1 assurent en pratique la linéarité de la convergence de l'algorithme à partir de quelques itérations. Ici un découplage de l'erreur par modes est possible, car le système est linéaire, et nous appliquons le procédé d'Aitken, comme dans [4], dans le cadre de la décomposition de domaine.

### 2.0.3 Quelques résultats

Tout d'abord nous avons testé la méthode numérique décrite en section 2 sur un problème elliptique ayant une solution analytique ( $f : x, y \rightarrow x^3(x - \pi)^3 y$ ) afin de valider notre approche. On voit numériquement dans la table 2.0.3 que notre méthode est d'ordre 2.5.

Par ailleurs, nous avons utilisé cette méthode le problème auxiliaire suivant:

$$I \begin{cases} -div(A\nabla\rho_\epsilon^k) = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ n \cdot (A\nabla\rho_\epsilon^k + e_k) = 0 & \text{sur } \partial M_\epsilon \\ \rho_\epsilon^k \text{ est } 1\text{-periodique en } y_1 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \nabla\rho_\epsilon^k = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où  $M_\epsilon$  représente un module. La figure 3 représente la convergence en norme  $L^\infty$  de l'algorithme de Schwarz dans l'espace des modes. L'erreur pour chaque mode est la norme infinie de la différence entre deux itérations de Schwarz successives. La figure 4 décrit la convergence en norme  $L^\infty$  de l'algorithme de Schwarz dans l'espace physique. Nous avons représenté uniquement les itérations où l'on procède à une accélération (toutes les 4 itérations) par le procédé d'Aitken. Enfin, les isovaleurs du même problème auxiliaire sont représentées en figure 5. Elles permettent d'apprécier la qualité de l'approximation en terme de régularité au niveau des interfaces artificielles. La condition aux limites lorsque  $y$  tend vers  $\infty$  est vérifiée figure 6.

Table 1: Précision et rapidité de convergence de l'algorithme (comparaison avec la solution analytique). La différence en  $\|\cdot\|_\infty$  entre la solution analytique et la solution calculée par l'algorithme à l'interface donne la précision

Nombre de modes	Discrétisation verticale	Précision en $\ \cdot\ _\infty$	Nombre d'itérations
32	28	5.e-2	30
64	32	1.e-2	28
128	32	1.e-3	15
256	32	2.e-4	15
1024	32	4.e-6	13

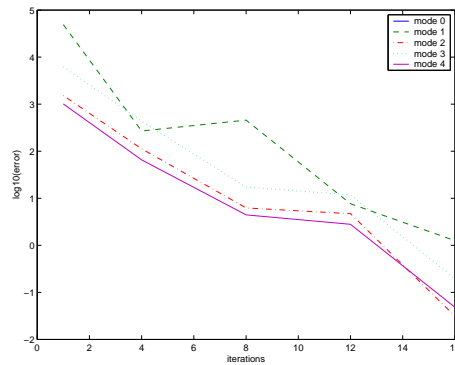


Figure 3: Convergence de l'erreur de Schwarz en norme  $\|\cdot\|_\infty$  dans l'espace des modes pour la résolution de (1)

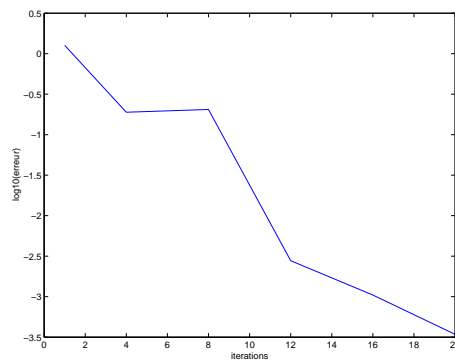


Figure 4: Convergence des accélérations de l'erreur de Schwarz en norme  $\|\cdot\|_\infty$  dans l'espace physique pour la résolution de (1)

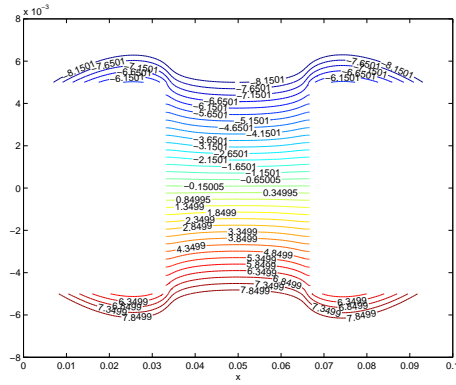


Figure 5: Isovaleurs de la solution de (1)

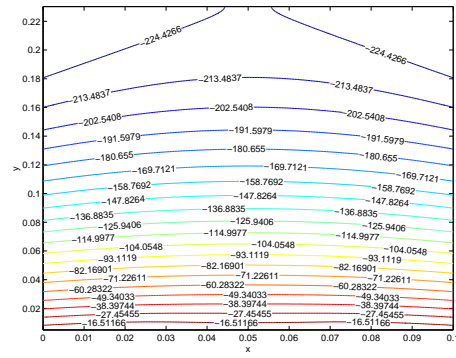


Figure 6: Isovaleurs de la solution de (1) dans le sous-domaine  $\Omega_1$

### 3 Modélisation globale d'un module à partir de la description des alvéoles et galeries

Dans une seconde partie, on s'intéresse à la modélisation d'un module de stockage, en supposant qu'il est composé d'un grand nombre de galeries de manutention, avec ses alvéoles (cf. les figures 7 et 8); les galeries de manutention étant de plus reliées par une galerie de travaux. Un petit paramètre  $\epsilon$ , représentant dans ce cas l'inverse du nombre de galeries de manutention, cf. figure 7. On considère que l'endommagement éventuel se traduit par un accroissement des vitesses de convection et du coefficient de diffusion dans le système de galeries.

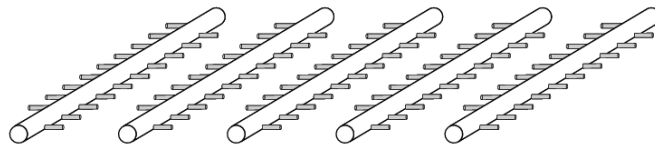


Figure 7: Une partie d'un module d'un site de stockage, avec 5 rangées d'alvéoles de conteneurs réparties autour des galeries de manutention

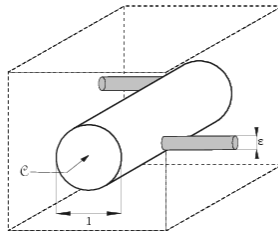


Figure 8: Cellule de périodicité  $Y$  comprenant une partie "galerie endommagée"  $S = ] - 1/2, 1/2[ \times \mathcal{C}$  et un groupe d'alvéoles de conteneurs  $P_\epsilon$

L'asymptotique d'ordre zéro, avec  $c^0(x, t)$  associée au cas "endommagé" fait alors apparaître trois comportements différents selon la valeur du nombre de Péclet, noté  $\beta$ , dans la direction des galeries.

- Si  $\beta$  est faible, on retrouve un modèle global de transport avec diffusion-convection où les galeries n'ont pas de contribution particulière.
- Si  $\beta$  vaut la valeur critique 1, il y a couplage entre le transport diffusif-convectif dans les galeries et celui extérieur aux galeries.
- Si  $\beta$  est supérieur à cette valeur critique, le modèle global tient uniquement compte de ce qui se passe dans les galeries.

La partie numérique associée à cette expansion asymptotique est en cours de développement.

## References

- [1] Bourgeat A., Marusic-Paloka E, Gipouloux O. *Mathematical Modeling of an underground waste disposal site by upscaling*, Accepté pour publication dans Math. Meth. Appli. Sci, 2003.
- [2] A. Bourgeat, O. Gipouloux, E. Marusic-Paloka. Mathematical modelling of an array of underground waste containers. *Compte Rendus Académie des Sciences, Mécanique* 330, pp. 371-376, 2002.
- [3] A. Bourgeat, I. Boursier, D.Tromeur-Dervout, Modelling of an underground waste disposal site by upscaling, simulation with Domain Decomposition Method, Proceedings 15<sup>ème</sup> conférence internationale de technique des dcompositions de domaine, DD15, Berlin, juin 2003 (en cours de publication).
- [4] M. Garbey, M. Tromeur-Dervout. On some Aitken like acceleration of the Schwarz method *Int.J. For Numerical Methods In Fluids*, 40(12):1493–1513, 2002
- [5] <https://mcs.univ-lyon1.fr/MOMAS/couplex.htm>