

Un schéma d'éléments ou volumes finis adaptatif
pour les équations de Darcy

Christine Bernardi

Laboratoire d'Analyse Numérique
C.N.R.S. et Université Pierre et Marie Curie

avec Y. Achdou et F. Coquel

dans le cadre d'un contrat avec Électricité de France

Les équations de **Darcy** modélisent l'écoulement d'un fluide incompressible visqueux dans un milieu poreux : dans un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 ,

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Trouver (\mathbf{u}, p) dans $L^2(\Omega)^d \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ tel que

$$\forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad b(\mathbf{u}, q) = 0,$$

où les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont données par

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} \, q)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Le problème admet une solution unique.

Le problème d'éléments finis

$(\mathcal{T}_h)_h$: famille régulière de triangulations.

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_0(K)^d \right\}.$$

M. Crouzeix, P.-A. Raviart

M_h : espace des fonctions de $L^2(\Omega)$

- dont la restriction à chaque élément K de \mathcal{T}_h est affine,
- qui sont continues aux milieux des côtés ($d = 2$) ou aux barycentres des faces ($d = 3$) des éléments de \mathcal{T}_h .

L'espace M_h n'est pas inclus dans $H^1(\Omega)$

⇒ Discrétisation non conforme !

Trouver (\mathbf{u}_h, p_h) dans $X_h \times M_h$ tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0,$$

où la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ est donnée par

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} \, q_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Le problème admet une solution,
unique à une constante additive sur la pression près.

Le schéma de volumes finis

\mathcal{E}_K : ensemble des côtés ($d = 2$) ou faces ($d = 3$) de K ,

$$\mathcal{E}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_K.$$

Trouver $(\mathbf{u}_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ et $(p_e)_{e \in \mathcal{E}_h}$ tels que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{u}_K + \frac{1}{\text{mes}(K)} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} p_e \text{mes}(e) \mathbf{n}_K = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall e \in \mathcal{E}_h, \quad [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_e = 0.$$

- Le problème d'éléments finis et le schéma de volumes finis sont équivalents.

Les $(\mathbf{u}_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ et $(p_e)_{e \in \mathcal{E}_h}$ sont solution du schéma de volumes finis si et seulement si le couple (\mathbf{u}_h, p_h) défini par

$$\mathbf{u}_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} u_K \chi_K, \quad p_h = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} p_e \varphi_e,$$

est solution du problème d'éléments finis.

- Le schéma est parfaitement conservatif.

Vitesse à divergence exactement nulle.

Estimations a priori

On fixe la constante sur la pression discrète en imposant que p_h appartienne à $L_0^2(\Omega)$, c'est-à-dire que

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} p_e \text{mes}(\omega_e) = 0.$$

ω_e : union des un ou deux éléments de \mathcal{T}_h contenant e .

Si la solution (\mathbf{u}, p) appartient à $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$, $0 < s \leq 1$, on a la majoration d'erreur a priori suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c(\mathbf{u}, p) h^s.$$

Indicateurs d'erreur

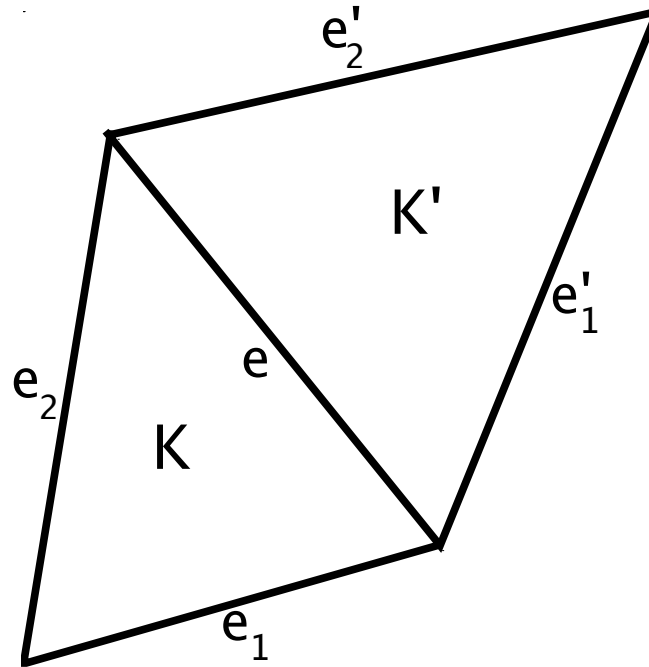
\mathcal{E}_h^0 : ensemble des éléments de \mathcal{E}_h qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$.

h_e : longueur ($d = 2$) ou diamètre ($d = 3$) de e .

Pour tout e dans \mathcal{E}_h^0 ,

$$\eta_e = h_e^{-\frac{1}{2}} \| [p_h]_e \|_{L^2(e)}.$$

Peu coûteux à calculer !



\mathbf{a}_i , $1 \leq i \leq d$: extrémités ou sommets de e ,

e_i et e'_i : côté ou face opposée à \mathbf{a}_i dans les éléments K et K' contenant e .

En dimension $d = 2$,

$$\eta_e = \frac{1}{\sqrt{3}} |p_{e_1} - p_{e'_1} + p_{e'_2} - p_{e_2}|.$$

Estimations a posteriori

\mathbf{f}_h : approximation de \mathbf{f} dans X_h telle que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{f}_h|_K = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \eta_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c' \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

$$\eta_e \leq c \sum_{e \subset K} |p - p_h|_{H^1(K)}.$$

Estimations optimales !

Et quelques extensions ...

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} + \mu \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

lorsque la fonction μ est positive

- constante par morceaux
- ou régulière par morceaux.

Y. Achdou, C. Bernardi, F. Coquel — A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations, soumis.

Y. Achdou, C. Bernardi — Un schéma de volumes ou éléments finis adaptatif pour les équations de Darcy à perméabilité variable, C.R. Acad. Sc. Paris 333 série I (2001), 693–698.